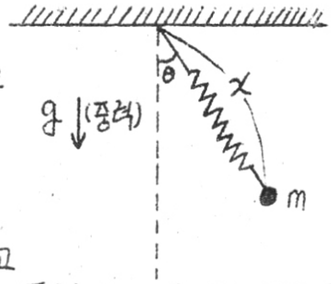
물리학과 대학원 자격시험 I

고전역학, 전자기학 (page 1)　　　　1983. 8. 20.

1. 그림과 같이 질량 m 이 달려있는 용수철(용수철 상수 k) 진자가 있다. 용수철의 질량은 없다고 가정하고 질량이 달려있지 않았을때 원래 용수철의 길이는 l 이였다. 그리고 진자의 운동은 중력의 방향과 평행한 한 수직면 상에서만 이루어 진다고 생각하라.

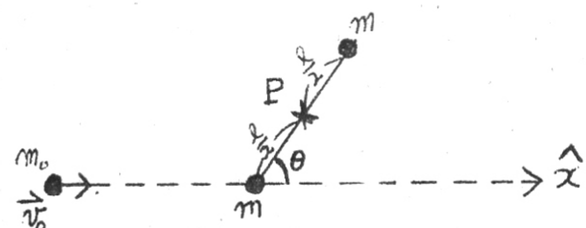


(i) 주어진 계에 대해 Lagrangian 을 세우고 그로 부터 운동 방정식을 구하라.

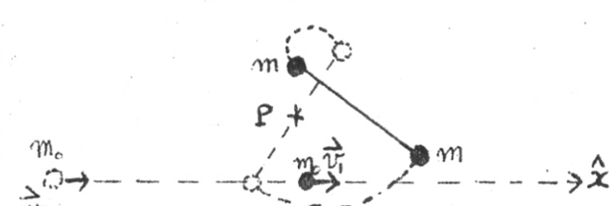
(ii) 이 계의 안정 평형점 (x_0, θ_0) 는?

(iii) (x, θ) 가 (x_0, θ_0) 근방에서 미소 진동을 할때 이에 대응하는 선형 근사해를 구하라.

2. 그림과 같이 운동량 $m_0 \vec{v_0}$ 인 입자가 질량이 같은 원자 2개(각 원자의 질량은 m)가 단단한 막대에 의해 연결된 분자의 한쪽 원자와 정면 충돌을 하는 경우를 생각 하고자 한다. 2차원적 탄성충돌 이라고 가정하고 충돌하기 전에 분자는 정지해 있었으며 입사 입자의 진행 방향과 θ 되는 각을 이루고 놓여 있다. 분자를 형성하고 있는 막대의 길이는 l, 막대의 질량은 무시한다. 다음 질문들에 답하라. 「(힌트): 정면 충돌 이므로 입사한 (질량이 m_0 인) 입자는 충돌후 어떤 속도 $\vec{v_1}$ 으로 계속 x축상을 운동할 것임에 유의하라. 그리고 충돌 후에 분자의 선 운동량 및 각운동량을 이 분자의 질량 중심이 갖는 운동량과 질량중심에 대한 상대 운동량의 합으로 생각하면 편리하다」



충돌 전



충돌 후

(i) 이 충돌에서의 선운동량 보존식을 Laboratory frame 에서 써라.

(ii) 충돌후 P점(그림 참조)에 대한 분자의 질량 중심이 갖는 각운동량은 0 임을 보이고 이 충돌에서의 각운동량 보존식을 P점을 origin 으로 해서 써라.

(iii) 이 충돌에서의 에너지 보존식을 Laboratory frame 에서 써라.

(iv) 충돌후 분자의 질량중심점이 갖는 속도를 구하라.

물리학과 대학원 자격시험 I

고전역학, 전자기학 (Page 3) 1983, 8. 20.

(V) 이 전자의 속도 변화 $\Delta\vec{v}$로 인하여 유도되는 magnetic moment $\Delta\vec{m}$의 방향을 제시하고 이것을 $\vec{B}_{ext}$의 방향과 비교하여 그 물리적 의미를 간단히 기술하라.

5. 유전상수 ϵ, 투자율 μ 인 선형매질에서 일정한 진동수 ω로 진동하는 전자기장은 다음과 같은 Maxwell 방정식으로 기술된다.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{i\omega\epsilon}{c}\vec{E}$$

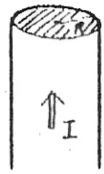
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c}\vec{H}$$

위에서 전류밀도 $\vec{J}$는 옴(Ohm)의 법칙, $\vec{J}=\sigma\vec{E}$, 를 만족한다고 가정한다. 단 σ는 이 매질의 전기 전도도이다.

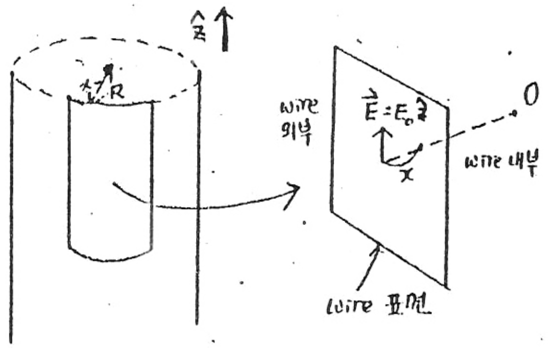
(참고; $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$ 이고 원통 좌표계에서 $\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$ 이다)

(i) 이 매질이 양질의 전도체이어서 $\sigma \gg \omega\epsilon$ 이 되면 $\nabla^2\vec{E} = i\frac{4\pi}{c^2}\omega\mu\sigma\vec{E}$ 가 만족됨을 보여라.

(ii) 반경 R인 원통형 도선에 직류 ($\omega=0$) I가 흐를 때 이 도선에 흐르는 전류는 도선의 단면적에 고루 퍼져 흐름을 보여라. ((i) 항의 식을 이용할 것)



(iii) 이 도선에 교류 전류가 흐른다고 하고 도선 표면 바로 안에서 전장을 재본 결과 $\vec{E} = E_0\hat{z}$ ($e^{i\omega t}$를 제외한 부분) 처럼 주어졌다고 하자. 도선의 반경 R이 충분히 커서 도선 표면을 무한 평면처럼 생각해도 좋다고 보자. 표면으로 부터의 거리 x의 함수로 $E_z(x)$를 구하라. (※ 전장이 (따라서 전류가) 도선 표면으로 부터 어떤 characteristic length scale δ 안에 국한 됨을 보고자 한다. δ가 어떻게 주어지는지 명시하라)



물리학과 대학원 자격시험

양자역학, 통계역학 문제 P1. 1983, 8, 20

1. 일차원 공간에서 질량 m인 입자가

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ V_0 & , x \geq 0 \quad (\text{단 } V_0 > 0) \end{cases}$$

처럼 주어지는 potential barrier 를 향해 $x = -\infty$ 에서 에너지 $E\ (> V_0)$를 가지고 입사하는 경우를 생각하자.

(i) 파동함수 $\psi(x,t)$를 $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ 을 써서 표시하라.

(ii) 일반적으로 포텐셜 $V(x)$ 아래 있는 입자의 probability current 를

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right]$$

처럼 표시함이 타당함을 보이고 위의 경우에 해당하는 입자의 probability current 를 $x<0$, $x \geq 0$ 두 영역에서 각각 구하라.

(iii) 위에 주어진 포텐셜의 경우 입자의 반사계수 R 과 투과계수 T 가 각각

$$R = 1 - \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}, \qquad T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

가 됨을 보여라.

2. Schrödinger-picture Hamiltonian 이 좌표공간 (1 차원) 에서

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon x^4$$

처럼 주어지는 입자를 생각하는데 다음과 같은 미분 연산자

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

를 도입해 보자.

(i) 만약 $H_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$ 라고 놓을때

$$a\psi_n(x) = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}(x),$$

$$a^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}(x),$$

$$\int d^3x\, \psi_n^*(x)\psi_n(x) = 1,$$

(여기서 $n = 0, 1, 2, \cdots$)

로 정의되는 함수 $\psi_n(x)$ 들은 H_0 의 고유함수임을 보이고 그 고유치도 함께 구하라.

(ii) n, m 이 서로 다른 정수일때

$$\int d^3x\, \psi_n^*(x)\psi_m(x) = 0$$

임을 증명하라.

(iii) $\varepsilon\ (>0)$ 이 아주 작은 상수일때 원 Hamiltonian H 에 대응하는 에너지 고유치들을 (i) 에서 구한 함수 $\psi_n(x)$ 을 써서 ε 의 1st order 까지 계산하라.

3. 수소 분자의 회전 상태를 기술하는데에는 두개의 수소핵(양성자)만 고려하면 된다. 두개의 양성자 (즉 p-p)가 속박된 상태를 질량 중심계에서 생각하는데 relative orbital angular momentum 을 $\vec{L}$, 두 양성자 각각의 intrinsic spin angular momentum 을 $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$

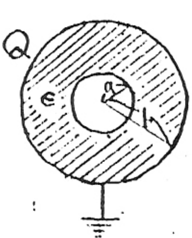
물리학과 대학원 자격시험 I

고전역학, 전자기학 (Page 2)　　1983. 8. 20

(v) 분자에 전달된 에너지의 분배 중 ratio $\frac{(\text{회전 운동에너지})}{(\text{직선 운동에너지})}$ 를 구하고 이것이 1을 넘지 않음을 보여라.

---

3. 반경이 a 및 b인 두 구면도체로 된 축전기 내부에 유전체(유전 상수 ϵ)가 채워져 있다. 반경 b의 구는 접지(ground)되어 있다고 하자.



(i) 이 축전기의 용량(capacitance)을 구하라.

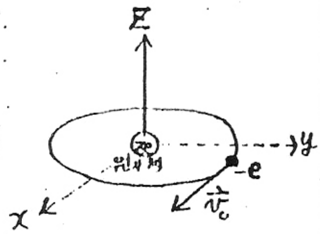
(ii) 이 유전체가 시간의 불순물에 의하여 전기 전도도 σ를 갖게 되면 방전 현상이 생길 것이다. 시간 $t=0$에서 이 축전기의 전위차가 V_0가 되게 대전되어 있다 하고 다음 물음에 답하라.

a) 구면사이의 임의점 r $(a<r<b)$에서의 전장 $\vec{E}(r,t)$를 구하라.

b) 축전기에 대전된 전하가 $1/e$ 배로 줄어드는데 걸리는 시간은?

---

4. 그림과 같이 한 개의 전자가 매우 무거운 원자핵 $(+Ze)$ 주위를 xy 평면 상에서 속도 $\vec{v}_0$를 갖고 원형궤도를 그리며 돌고 있는



고전적 모델을 생각하자. 원자핵은 매우 무거워서 고정된 점으로 간주할 수 있다고 보고 다음 물음에 답하라.

(i) 전자가 그리는 궤도인 원형 환(ring)을 흐르는 전류 I를 구하라.

(ii) 이 전자의 회전운동으로 인하여 유도되는 magnetic moment $\vec{m}$을 구하라.

(iii) 원자핵과 전자간의 거리를 고정시킨 채(실로 연결해 놓았다고 생각한다.) 이제 외부에서 $\vec{B}_{ext} = -|B|\hat{z}$가 가해졌다고 하자. 이 외부 자장을 걸어줌으로서 변화된 전자의 속도 $\Delta\vec{v}$를 Faraday 법칙을 써서 구하라.

(iv) (iii)에서 원자핵과 전자간의 거리를 고정시키지 않았다 해도 $\frac{|\Delta v|}{v_0} \ll 1$ 인 한 이 거리는 변하지 않는다(Δv의 1차 근사로). 이를 보여라.

물리학과 대학원 자격시험

양자역학, 통계역학 문제 p2.　　　　　　1983. 8. 20

라고 표시하자. 주어진 계의 Hamiltonian 을 H 라고 할때

$$[H, \vec{L}^2] = [H, \vec{S}_1 + \vec{S}_2] = 0$$

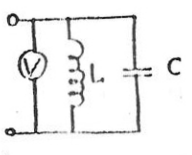
를 만족한다고 가정하고 다음 질문에 답하라.

(i) $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ 및 $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ 가 가질 수 있는 고유치 값은?

(ii) (i) 에서 나온 고유치 값에 대응하는 spin wave function $|s, s_z\rangle$ (여기서 $s_z \hbar = (S_z)'$, $s(s+1)\hbar^2 = (\vec{S}^2)'$ 임) 들을 S_{1z} 와 S_{2z} 의 동시 고유상태 $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ 들로서 표시해 보아라. (※ $|s, s_z\rangle$ 및 $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ 는 normalized state 들로 간주할 것).

(iii) 이 p-p system 에서 $\vec{S}^2$ 의 고유치에 대응하는 가능한 $\vec{L}^2$ 의 고유치 값들을 말하고 또 그 근거를 설명하여라. (ortho 및 para hydrogen 분자의 구별).

4. 그림과 같은 회로를 갖는 작은 계가 절대 온도 T 인 물체와 열 평형을 이루고 있다.



전하 Q 및 $\frac{dQ}{dt}$ 의 값에 대응하는 이 계의 energy 는 (고전적으로)

$$E = \frac{L}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2C}Q^2$$

(C : capacitance, L : inductance) 처럼 주어진다. Q 를 일반 좌표처럼 생각해서 양자화할 수 있다고 보고 다음 물음에 답하여라.

(i) 이 양자계에서 가능한 에너지 고유치 E_n 들을 써라.

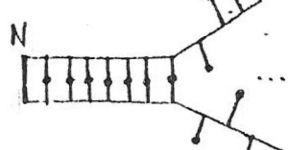
(ii) 이 양자계가 갖는 평균에너지 U 를 T 의 함수로 나타내어라.

(iii) 이 회로에 나타나는 잡음신호 (noise signal) 의 rms 치, $\langle V^2\rangle^{1/2}$ (여기서 $V = \frac{Q}{C}$), 를 가지고 온도를 재려한다. 다음과 같은 관계가 성립함을 보여라.

$$\langle V^2\rangle^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{kT}{C}}, & \text{if } kT \gg \dfrac{\hbar}{\sqrt{LC}} \\ \left(\dfrac{\hbar^2}{4C^3L}\right)^{1/4}, & \text{if } kT \ll \dfrac{\hbar}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

(주 이 회로를 온도계로 쓰자면 고전적 극한에서만 유용하다).

5. 다음과 같은 Zipper 모양을 한 기다란 macromolecule 이 온도 T 인 열원과 열 평형을 이루고 있다.



이 분자의 고리 (Zipper 의 이 (teeth)) 가 풀리려면 Zipper 가 열리듯이 앞의 고리가 모두 풀려있어야 풀리고 고리하나가 풀릴때마다 에너지 ϵ_0 를 흡수한다. 단 마지막 N 번째 고리는 떨어질 수 없다고 가정한다. 또한 풀린 고리의 짝은 g 가지 가능한