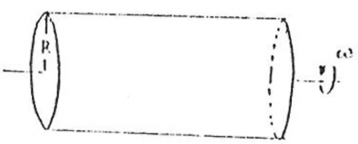
고전역학, 전자기학 문제 p. 1 1981. 3. 3

1) 내부반경 R 인 원통형의 구조물을 우주 공간에 만들어 우주 식민지 (space colony)로 이용한다고 가정하자.



a) 원통 내부 벽면에서 지구표면 중력가속도 g 의 $\frac{1}{2}$ 에 해당하는 가속도를 느끼게 하려면 이 구조물의 원통 중심축에 대한 회전 각속도 ω 는 얼마가 되어야 하는가?

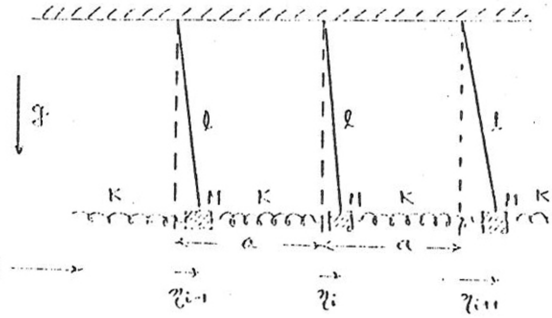
b) a)에서와 같이 회전하고 있는 colony 안에서는 원통의 radial 방향이 심리적으로 "아래" 방향이 된다. 원통내부벽면에 놓여 있는 질량 M 인 물체를 "위" 방향으로 높이 h ($<R$) 인 지점까지 들어 올리려면 얼마만한 일을 해 주어야 하는가?

c) 높이 h ($=R-r$) 인 지점에 정지하고 있던 물체가 자유낙하 운동을 하여 "지면" (즉, 내부벽면)과 충돌하기까지 소요되는 시간을 구하라. (non-rotating inertial reference frame 에서 생각하면 쉽게 구할 수 있음.)

d) Coriolis force 의 효과에 의하여 c)번 문제에서 물체는 radial 방향으로 떨어지지 않고 deviate 하게 된다. 물체의 낙하 지점을 구하라.

---

2) 다음 그림과 같이 질량 M 인 추들이 길이 l 인 실에 매달려 미소진동을 하고 있다. 추 사이에는 탄성계수 K 인 spring 들이 있어 서로 연결되어 있으며 평형상태에서 추 사이의 간격은 a, 추의 움직임은 중력장 내에서 연직면상에 한정되어 있고 i 번째 추의 x 방향의 미소 변위를 η_i 라고 한다.



Continuum limit 즉, $a \to 0$ 에서

$\eta_i = \eta(x)$, $\eta_{i+1} = \eta(x+a)$, ...

$a \to dx$ 로 대치할 수 있을 때,

a) 이 system 의 Lagrangian density 가

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - Ka\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 - \mu\frac{g}{l}\eta^2\right]$$

으로 표시됨을 보여라. (단, $\mu = \frac{M}{a}$ 이다.)

b) 위의 Lagrangian 을 사용하여 운동방정식을 구하라.

c) 외부에서 주파수 ω 로 drive 할 때 ($\eta(x,t) = A(x)e^{i\omega t}$) 이 system 의 운동방정식의 일반해를 $\omega^2 > \frac{g}{l}$ 과 $\omega^2 < \frac{g}{l}$ 의 경우에 대하여 각각 구하여라. (단, driving force 가 이 계에 대하여 일을 하지 않는다고 가정하고 정상상태 (steady state) 만을 생각한다.)

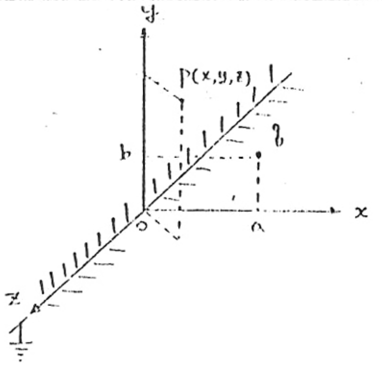
d) 특히 $x=0$ 에서 $\eta = Ae^{i\omega t}$ (A: 상수) 이며 $x = L$ ($L \gg a$) 에서는 spring 이 고정되어 있다고 했을 때 이 system 의 운동상태에 대하여 논하라.

---

3) 다음 그림과 같이 무한히 넓은 두 도체 평면이 직각으로 만나고 그 교차선을 따라서 z 축이 형성되어 있다고 하자. 도체면의 포텐셜은 $V=0$ 로 유지시키고 $(a, b, 0)$ 인 점에 전하 q 를 놓는 경우 다음 물음에 답하라.

고려대학교 대학원 자격시험

고전역학, 전자기학 문제 P. 2 　　　　　　　　　　　　 1984. 3. 3



a) 위의 점 $P(x, y, z)$ 에서의 전기 포텐셜을 구하라.

b) 도체평면으로 부터 전하 q 가 받는 전기력을 구하라.

c) xz 평면상의 단위면적당 전하 즉, 전하 면밀도 σ 를 구하라.

---

4) 유한 공간내에 분포되어 있는 steady state current density $\vec{J}(\vec{r}')$ 에 대한 vector potential $\vec{A}(\vec{r})$ 은

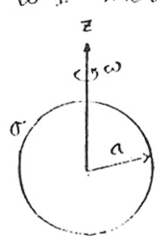
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r'$$

으로 주어진다.

a) $|\vec{r}| >> |\vec{r}'|$ 인 경우 $\vec{A}(\vec{r})$ 을 dipole term 까지 전개하라.

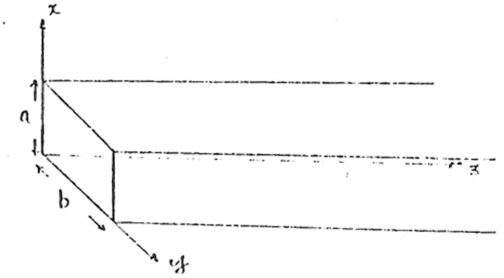
b) electric monopole term 의 값을 구하라.

c) 표면 전하 밀도 σ 로 균일하게 대전되어 있는 반경 a 인 구체가 z 축을 중심으로 각속도 ω 로 회전하고 있다.



이 회전구체의 magnetic dipole moment $\vec{m} = \frac{1}{2c}\int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')\, d^3r'$ 을 구하라.

5) 그림과 같이 단면적 ab 를 갖는 도파관 (wave guide) 을 통해 전달되는 전자파를 생각하자.



이 전자파의 전기장 $\vec{E}$ 및 자기장 $\vec{B}$ 는 위치에 대한 변화만 고려하면 다음 방정식으로 주어져 진다. (cgs gaussian 단위계)

$$\left(\nabla_{tr}^2 - k^2 + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z = 0$$

$$\left(\nabla_{tr}^2 - k^2 + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right) B_z = 0$$

$$\vec{E}_{tr} = \frac{1}{\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\left(\vec{\nabla}_{tr}\frac{\partial E_z}{\partial z} + i\frac{\omega}{c}\vec{\nabla}_{tr}\times\hat{i}_3 B_z\right)$$

$$\vec{B}_{tr} = \frac{1}{\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\left(\vec{\nabla}_{tr}\frac{\partial B_z}{\partial z} - i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\vec{\nabla}_{tr}\times\hat{i}_3 E_z\right)$$

여기서 E_z, B_z 는 각각 $\vec{E}$ 과 $\vec{B}$ 의 z축 성분, $\vec{E}_{tr}$ 과 $\vec{B}_{tr}$ 은 각각 z축에 수직인 성분, $\vec{\nabla}_{tr} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\hat{i}_2$ 를 나타내며 ε, μ 는 도파관 내 물질의 유전상수 및 투자상수 이다.

a) 위의 도파관이 도체로 이루어진 경우 도파관의 벽면에서 전기장 $\vec{E}$ 가 만족하는 조건을 구하라.

b) 이 도파관 내에서의 전기장의 z축 성분, 즉, E_z 는

$$E_z = E_0 \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

로 주어짐을 보이라. $(m, n = 1, 2, \cdots)$

c) 전자파의 진동수 ω 와 파수 k 의 관계식은

$$\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \gamma_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

으로 됨을 보이라.

d) $B_z = 0$ 즉 TM mode 의 경우 E_x, E_y 는 각각 다음과 같이 됨을 보이라.

$$E_x = \pm\frac{ik}{\gamma_{mn}^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

$$E_y = \pm\frac{ik}{\gamma_{mn}^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\cos\left(n\pi\frac{y}{b}\right)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

1) 스핀에 관한 문제이다.

(a) 임의의 스핀 연산자 $\vec{S}$의 Cartesian 좌표성분을 S_x, S_y 및 S_z라 둘 때 이들이 만족해야 하는 관계식을 쓰고 스핀 1/2인 입자에 대해

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

로 표시할 때 S_y를 구하라.

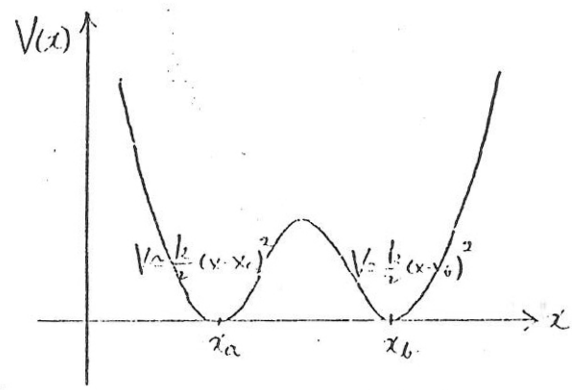
(b) 위의 문제에서 스핀 연산자 S를

$$S = S_x \cos\alpha + S_y \sin\alpha$$

로 정의할 때 S에 대한 고유치 및 고유벡터들을 구하라.

(c) 균일자장 내의 스핀 1/2 입자의 Hamiltonian이 $H = k S_z$ (k는 상수)로 주어졌다 하자. 초기에 이 입자가 S_x의 고유상태에 고유치 $\frac{\hbar}{2}$를 갖고 있었다 할 때 S_x의 기대치를 시간의 함수로 구하라.

2) 그림에서와 같이 점 x_a 및 x_b 근처에서 각각 $\frac{k}{2}(x-x_a)^2$, $\frac{k}{2}(x-x_b)^2$로 근사되는 symmetric double-well potential $V(x)$에 의해 기술되는 1차원 운동을 생각하자.



(a) $V(x)$의 구체적인 함수형을 하나 써 보아라.

(b) $\phi_a(x)$와 $\phi_b(x)$를 다음 관계식을 만족하는 기저 고유함수라 하자.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2}(x-x_a)^2\right]\phi_a(x) = E_0\,\phi_a(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2}(x-x_b)^2\right]\phi_b(x) = E_0\,\phi_b(x)$$

이들을 basis로 하는 선형공간에서 $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$의 두 (근사) 에너지 고유치 E를

축퇴치 (degenerated value) E_0 와 비교하고자 한다. 근사적으로

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_a^* H \phi_a = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_b^* H \phi_b \simeq E_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_b^* H \phi_a = \Delta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_b^* \phi_a \simeq 0$$

이라 둘 때 두 에너지 고유치의 축퇴치에 대한 splitting 을 구하라.

6 c.) 위의 근사에서 두 고유상태를 $\phi_a(x)$ 와 $\phi_b(x)$ 의 선형 결합으로 표시하고 (normalize 시킬 것) 어떤것이 기저 상태 인가를 밝혀라. $\phi_a(x)$ 와 $\phi_b(x)$ 는 normalize 되어있다고 생각할것.

3) 3차원 공간 상에서 질량 m 인 자유입자 를 양자역학적으로 다루고자 한다. 순간 $t=0$ 에 입자 가 $\vec{x}_0$ 위치에 있었다면 그 파동함수는 Dirac δ-function 을 써서

$$\psi(\vec{x}, t=0) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

로 둘수있을것이다. 다음 질문에 답하라.

6 a.) $t>0$ 에서 $\psi(\vec{x};t)$ 를 momentum 공간에서의 적분형으로 써 보아라.

6 b.) 위에서 실제 적분 후 $\psi(\vec{x},t)$ 는 어떻게 표시되는가? (단 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ix^2} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi}{4}i}$ 임).

6 c.) 위의 결과는 순간 $t=0$, 위치 $\vec{x}_0$ 에서 속도 $\vec{v}$ 를 갖는 고전적 입자의 운동과 관련지어 해석해 보아라.

4) n mole 의 분량을 지닌 이상기체는 그 내부 에너지와 상태 방정식이 각각

$$U = n c_v T$$

$$pV = nRT$$

로 표시된다. 여기서 c_v 는 정적비열 이고 나머지 기호는 통상적인 의미를 가진다.

a) 이상기체의 정압비열 C_p가 $C_p = C_v + R$ 이 됨을 보여라.

b) 온도 T, 압력 p 에서의 이상기체의 entropy는 다음 관계식으로 표시 됨을 보여라.

$$S = S_0 + n C_p \ln T - nR \ln p$$

c) 체적 V_1, V_2 의 두 용기 속에 동일한 분량 (분자수) 동일한 종류의 이상기체가 들어있다. 이들의 온도는 각각 T_1, T_2 이며 압력은 p로서 서로 같다. 이 두 용기를 연결하여 이 두 기체를 혼합시킨 경우 이 계에서 발생할 entropy 의 변화량을 구하라.

---

5) 질량 m의 입자가 길이 L인 일차원 공간에서 반복운동을 하고 있다.

a) 이 입자가 에너지 E를 가졌다하고 공간 양단의 고정된 벽에서 완전 탄성충돌을 한다고 할때 위상공간 (x-p 공간) 에서 이 입자의 고전역학적 상태는 나타내는 궤적을 그려라.

b) 이 입자의 상태가 에너지 상한 E_{max} 이하의 모든 에너지는 갖도록 허용된다면 이 입자에게 허용되는 역학적 상태의 갯수는 얼마인가? (단 $\Delta x \cdot \Delta p = h$ 되는 면적이 1개의 역학적 상태에 대응한다고 보라). 이 경우 입자당 entropy를 E_{max}의 함수로 표시하라.

c) 이 입자의 역학적 상태는 양자역학적으로 고찰하고 그 entropy를 구하여

d) 공간의 한쪽 벽이 일정한 속도 u로 움직일 경우에도 entropy가 불변함을 보여라. (단 u는 입자의 속도에 비해 충분히 작다고 생각하라). Hint: 벽의 움직임으로 인하여 초래되는 입자의 에너지 변화 및 공간의 길이변화의 관계를 고전역학적으로 고려할것.