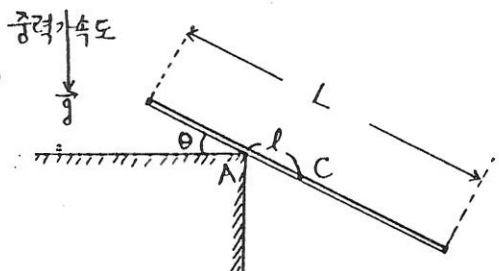


물리학과 대학원 자격시험

고전역학

1987. 3. 7

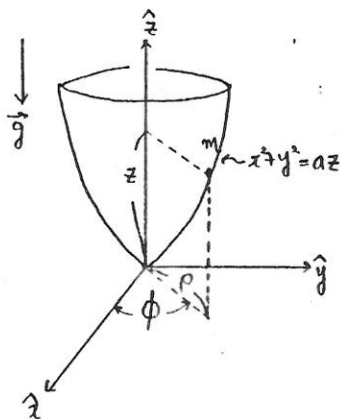
1. 그림과 같이 길이가 L , 질량이 M 인 균일한 막대가 책상의 수평면의 모서리에 걸쳐서 놓여 있다. 막대의 무게 중심 C 는 책상 모서리인 A 점에서 l 만큼 바깥쪽으로 떨어져 있다. 책상 모서리와 막대 사이의 정지 마찰계수는 μ 이다. 수평으로 정지하고 있던 막대를 놓으면 막대는 A 점을 중심으로 회전하다가 미끄러져 떨어 질 것이다.



- (가) 막대의 관성능률을 A 점에 대해서 (I_A) 또 무게 중심 C 점에 대해서 (I_C) 각각 구하라.
- (나) 책상 모서리가 이 막대에 수직하게 작용하는 Normal force (N)을 책상의 수평면과 막대 사이의 각 θ 의 함수로 구하라.
- (다) 막대가 미끄러지기 시작하는 각 θ_c 를 구하라.

2. 질량이 m 인 질점이 $x^2 + y^2 = az$ 로

표시 되는 마찰이 없는 곡면을 따라 중력 (중력 가속도; $-g\hat{z}$)의 영향 아래 운동을 하고 있다.



- (가) 이 입자의 운동을 기술 할수 있는 Lagrangian 을 구하라.
- (나) 운동 방정식 들을 구하라.
- (다) 이 질점이 $z=h$ (h : 상수)인 면을 따라 원운동을 한다고 할때 회전 frequency ($f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\dot{\phi}}{2\pi}$)가 높이 h 에 관계 없이 일정함을 보여라.
- (라) 입자에 섭동 (perturbation)을 가하여 위의 정확한 원 운동에서 조금 벗어 나게 하면 이 입자는 원 궤도 ($\rho(h) = \rho_0$; 상수)를 중심으로 진동을 하게 된다. 이때 진동 frequency 는 문제 (다)의 회전 frequency의 두배가 됨을 보여라. [Hint: $\rho = \rho_0 + u$ ($\rho_0 \gg u$)라 하고 u 에 대한 운동 방정식을 풀어라]

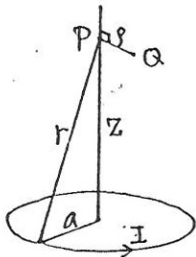
(끝)

물리학과 대학원 자격시험

전자기학

1987. 3. 7

1.



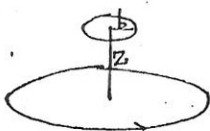
가) 그림과 같이 반경 a 인 원형 도선이 전류 I 가 흐르고 있다. 이 원형 도선의 중심축 상에 거리 z 만큼 떨어진 P 점에서의 자기장을 구하라.

나) P 점에서 축으로부터 거리 ρ ($\ll a$) 만큼 떨어진 Q 점에서 자기장이

$$B_\rho \approx \left(\frac{3\mu_0}{2r^2}\right) \rho B_z$$

로 주어짐을 보이라. 이때 B_ρ, B_z 는 자기장의 ρ 방향과 z 방향 성분이다.

다) ① 전류 I 가 교류 $I_0 \sin \omega t$ 에 의해 주어지고 축상 z 점에

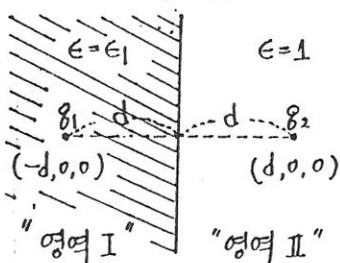


$$I = I_0 \sin \omega t$$

반경 b ($\ll a$) 인 작은 원형 도선을 놓을 때 이 원형 도선에 유도되는 기전력(emf) $\mathcal{E}$ 을 구하라

② 또 두 원형 도선 사이의 mutual inductance 는 얼마인가?

2. 공간의 반은 유전상수 ϵ_1 인 dielectric



material, 그리고 나머지 반은 진공 (즉 $\epsilon=1$) 으로 채 있다고 가정 하자. Dielectric material 경계면에 대해 대칭이

되도록 두개의 자유전하 q_1, q_2 를 놓는 경우를 생각하자 (그림 참조)

가) 공간상의 모든 점에서의 macroscopic electric field $\vec{E}(\vec{r})$ 를 구하는데 필요한 방정식 및 경계조건을 쓰라.

나) 가)에서 세운 식들을 만족하는 $\vec{E}(\vec{r})$ 은 구체적으로 (영역 I 및 영역 II 에서) 어떻게 주어지는가?

다) 전하 q_1 및 q_2 에 작용하는 힘들을 각각 계산하라.

3. 한정된 (localized) 공간에 분포되어 있고 시간에 따라 sinusoidal 하게 변하는 전하, 전류 분포를 고려하자. Lorentz gauge에서 이에 의한 Vector 포텐셜이

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t\right)$$

로 주어진다. 전류 $\vec{j}$ 가 시간에 따라 sinusoidal 하게 변하므로 $\vec{A}(\vec{r}, t)$ 의 공간변화는

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

로 되며, 이때 $k = \omega/c$, ω 는 각속도이다.

가) Long wave length limit 을 고려할 경우 위의 Vector 포텐셜이 radiation 영역에서는

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx -ik \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}$$

로 됨을 보이라. (단: 이때 $\vec{p}$ 는 위 분포에 의한 electric dipole moment 이다.)

나) 질량 m 인 작은 공이 spring 상수 K 인 용수철에 매달려 있다. 공은 전하 $+q$ 로 대전되어 있고 평형 위치로부터 a 만큼 잡아 다녔다가 놓았을 때 Radiation 영역에서의 초기 순간 자장, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 를 구하라.

다) 이때 또 전장, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 를 구하라 (힌트: Radiation 영역에서는 field 가 평면파임을 가정할 수 있다.)

라) 이 진동하는 공에 의해 이때 방출되는 시간 평균 power 를 계산하고 또 이의 angular distribution 을 구하라.

물리학과 대학원 자격시험

양자역학

1987. 3. 7

1. 수소 원자에 세기가 E 인 정전기장을 가할 경우 총 Hamiltonian은 $H = H_0 + H'$ 이다. H_0 는 비 섭동 (Unperturbed) Hamiltonian 이고 H' 은 섭동 (perturbed) Hamiltonian 으로 구 좌표계 (r, θ, ϕ) 에서 $H' = eEr \cos \theta$ 로 주어진다. H_0 의 고유상태 (eigen state)를 $|n, l, m\rangle$ 으로 표시하자.

(가) H_0 의 기저상태 ($n=1$)에너지는 섭동의 1차 근사 범위 내에서는 전기장 E 에 의해서 영향을 받지 않음을 보여라. [기저상태 함수는 $\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$ 로 표시된다. 여기서 a_0 는 상수이다.]

(나) H_0 의 $n=2$ 인 고유벡터 즉 $|200\rangle, |210\rangle, |211\rangle$ 및 $|21-1\rangle$ 을 기저 (basis)로 할 때 H_0 에 대해 이튼은 에너지 E 으로 축퇴 (degenerate) 되어 있으며, H' 은 행렬

$$H' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (200) & (210) & (211) & (21-1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} (200) \\ (210) \\ (211) \\ (21-1) \end{matrix}$$

으로 주어진다 (α : 상수). 총 Hamiltonian H 에 대한 고유벡터들과 그에 대응하는 에너지들을 구하라.

(다) 문제 (나)에서 구한 H 에 대한 고유 상태들이 모두는 $\hat{L}^2$ ($\hat{L}$: 각운동량 operator)의 고유상태가 되지 않는 물리적 이유를 밝히고, 이들 각 고유상태들에 대한 $\hat{L}^2$ 의 기대값을 구하라.

2. 1차원 조화 진동자의 Hamiltonian은 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ 로 표시된다. $\hat{a}^\dagger$ 및 $\hat{a}$ 는 생성 (creation) 및 소멸 (destruction) 연산자이고 수 (number) 연산자. $\hat{N}$ 을 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ 라 하면, 이들 고차 문제들은 $\hat{N}$ 의 고유벡터를 $|n\rangle$ 이라 할 때

$$\begin{aligned} \hat{N}|n\rangle &= n|n\rangle \quad n=0, 1, 2, \dots \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \end{aligned}$$

로 주어진다.

(가) $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$ 의 고유벡터를 $|\alpha\rangle$, 즉 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ 라 하면 $|\alpha\rangle$ 는 $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ 로 표시할 수 있음을 보여라. [참고; 고유값 α 는 복소수이고 photon의 coherent state가 $|\alpha\rangle$ 로 표시된다.]

(나) $|\alpha\rangle$ 상태에 대해서 기대값 $\langle \hat{a} \rangle$ 및 $\langle \hat{a}^2 \rangle$ 을 구하라.

(다) $|\alpha\rangle$ 상태에서는 $\Delta \hat{a} \Delta \hat{a}^\dagger = \frac{\hbar}{2}$ 가 성립함을 보여라. [참고; $\langle \hat{a} | \alpha \rangle$ 는 minimum packet을 이룬다.]

3. 스핀이 영 (zero)이고 질량이 m 인 양자역학적 입자가 구 (球)대칭인 포텐셜 $V(r)$ (여기서 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)에 주어지고 이 계가 적어도 속박상태가 하나 이상 존재할 때 그 기저상태는 반드시 S 상태 (즉 대응하는 에너지 고유 함수가 구 (球)대칭인 경우)에 해당한다.

(가) S 상태 에너지 고유 함수를

$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} U(r)$ 처럼 표시 할 때 $U(r)$ 이 만족하는 방정식을 유도하라.

(나) 포텐셜이

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (V_0 \text{는 양의 상수}), \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a \end{cases}$$

일 때 $V_0 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$ 이면 속박상태에 해당하는 에너지 고유상태는 존재하지 않음을 보여라.

(다) 포텐셜이 $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (k 는 양의 상수) 처럼 주어졌을 때 기저 상태 에너지 및 대응하는 고유 함수를 구하라. 고유 함수를 normalize 시키지 않아도 좋다.

(라) 문제에 제시된 "적어도 속박상태가

----- 반드시 S 상태 (즉 대응하는 에너지 고유 함수가 구 (球)대칭인 경우)에 해당한다."는 진술 (statement)을 증명하라.

(끝)