물리학과 대학원 자격시험 1

(고전역학) 1987. 8. 29

1. 관성 좌표계에 대하여 일정한 각속도 $\vec{\omega}$로 회전하는 좌표계를 생각하라.

(가) 힘 $\vec{F}$를 받고 있는 질량 m인 물체의 운동 방정식을 회전 좌표계에서 쓰고 각 항의 물리적 의미를 설명하라.

(Hint: 관성 좌표계에서 임의의 vector $\vec{A}$의 시간에 대한 미분 $d\vec{A}/dt$는 회전 좌표계에서의 미분 $d^*\vec{A}/dt$와

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

인 관계가 있다.)

(나) 지표면 상에 고정된 좌표계에서 천정에 줄로 매달려 있는 Foucault 진자의 운동 방정식을 써라. 여기서 지구는 균일한 질량 밀도를 가진 球라고 가정해도 좋다.

(다) 위의 Foucault 진자에서 진자의 진동면이 천천히 회전하는 것이 관측되었다. 진동면이 회전하는 이유를 위의 운동방정식에서 간단히 설명하라.

(라) 진자 위치의 위도가 북위 θ 일때, 진자 진동면의 회전 각속도는 $\omega\sin\theta$가 됨을 증명하라. (Hint: 진자 진동면과 같이 회전하는 좌표계를 생각할 것.)

2. 장력이 가해진 끈의 자유운동은 일차원 파동 방정식

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

으로 기술된다. v는 위상속도이고 $u(x,t)$는 파의 진폭이다.

(가) 끈의 길이가 l이고 양단이 고정된 경우 초기조건이 $u(x,0) = f(x)$, $\dot{u}(x,0) = g(x)$로 주어질때 Bernouille의 해

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[a_n\cos\frac{n\pi v}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi v}{l}t\right]$$

의 Fourier 계수 a_n과 b_n을 구하라.

(나) 위 파동 방정식은 다른 방법으로도 풀 수 있다. 즉 $r = x - vt$, $s = x + vt$로 변수 변환하여 $u(x,t) = Y(r,s)$로 표시하면 길이가 무한 $(l=\infty)$한 끈에 대한 해는

$$u(x,t) = Y(r,s) = \psi(x-vt) + \phi(x+vt)$$

모양으로 됨을 보이고 초기 조건이 $u(x,0) = F(x)$, $\dot{u}(x,0) = G(x)$라면

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x-vt) + F(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} G(\xi)\,d\xi$$

(D'Alembert의 해)

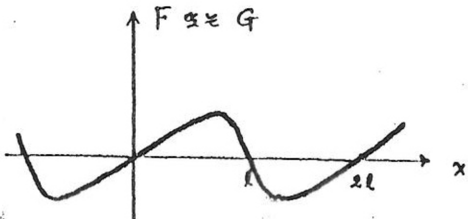
가 됨을 보여라.

(다) $F(x)$, $G(x)$는

$F(x) = -F(-x)$, $F(x) = F(x+2l)$

$G(x) = -G(-x)$, $G(x) = G(x+2l)$

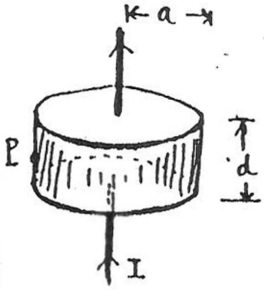
인 대칭성이 있고, $0 < x < l$인 영역에서는 $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ 일때 (그림 참조) D'Alembert의 해와 Bernouille의 해가 동등함을 보여라.



〈끝〉

물리학과 대학원 자격시험 I

(전기역학) 1987. 8. 29



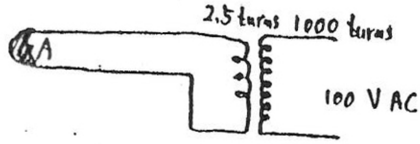
1. 그림과 같이 두개의 원형도체판으로 이루어진 평행판축전지가 있다. 이 축전지 내부는 유전율이 ϵ 인 유전체로 채워져 있다. 이제 이 축전지가 일정한 전류 I 로 충전되고 있다.

(가) 유전체의 원통형 표면상의 한점 P 에서의 자기장 $\vec{H}$ 를 구하라. (원통형 표면 근처에서 전자기장이 찌그러지는 효과는 무시한다.)

(나) P 점에서의 Poynting Vector $\vec{S}$ 의 크기 및 방향을 구하라.

(다) $\vec{S}$ 의 유전체 표면에 대한 적분 $-\int \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA$ 가 이 축전지에 저장된 정전에너지의 시간에 대한 변화율과 같음을 보여라.

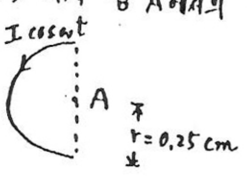
2.



약간의 관찰력이 있는 학생이라면 실험실에서 전기인두 (soldering gun)를 사용할때 다음과 같은 사실을 발견할 수 있을것이다. 즉 그림에서와 같은 환형 (ring type) 구리 tip의 안쪽면에 붙어 있는 납이 녹으면 tip을 흐르는 전류에 의해 환의 외부 (바깥쪽)로 밀려난다. 이와 같은 사실을 설명하고자 아래의 순서를 따라서 생각해 보기로한다. 다음 물음에 답하라.

(가) 우선 이 전기인두의 소모 일률이 100W 이고 transformer 의 열손실이 없다고 가정할 때 tip에 흐르는 전류를 구하라.

(나) 이제 점 A에서의 자기장을 구하기로 하자.

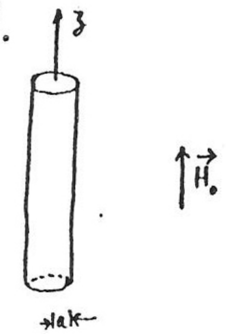


문제를 간단히 하기 위하여 그림과 같이 반지름 0.25cm 인 반원 둘레를 흐르는 전류에 의한 자기장을 구하라 ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A)
(참고: 구리는 납보다 전기전도도가 크므로 대부분의 전류는 구리 도선을 통해 흐른다고 볼수 있다.)

(다) tip의 안쪽에 납이 채워져 있다면 납을 통하여 eddy current 즉 유도전류가 흐르게 된다. 그 크기를 추산하기 위하여 (나)에서의 자기장 크기를 갖는 균일한 교류 (AC) 자기장 내에 반경 0.25cm의 원형 납판 (두께 d = 1mm, 비저항 30 $\mu\Omega$·cm) 이 놓여 있다고 가정하자. 이때 교류 자기장에 의하여 유도되는 전류는 원통형 대칭성을 갖는다. 이 유도 전류에 의한 납판의 자기 쌍극자 모멘트 (magnetic dipole moment)를 구하라. (Hint; 반경 r 과 r + Δr 사이에 흐르는 전류 Δi 에 의한 자기 쌍극자 모멘트의 크기는 $\pi r^2 \Delta i$ 이다.)

(라.) 이상의 결과를 바탕으로하여 녹은 납이 환의 외부로 밀려남을 설명해 보아라.

3.



반경 a 인 긴 원주강체 (solid cylinder)가 있다. 이 물질의 relative magnetic permeability μ_r 은 1 이고 (즉 $\mu = \mu_0$) 이 물질의 전기 전도도 σ 는 매우 크다. 그림과 같이 이 물체를 균일한 외부 자기장 $\vec{B}$ $(= \mu_0 \vec{H}_0)$ 에 놓아서 평형상태가 된후, 시간 t = 0 에서 외부 자기장을 갑자기 제거 시켰다. 시간에 대한 전장의 변화는 느려서 변위전류 (displacement current) $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 는 전류밀도 $\vec{J}$ 에 비해서 무시할수 있고 또 원주가 충분히 길어서 물체 내부 전자기장의 z-좌표 의존성은 없다고 보자.

물리학과 대학원 자격시험 I

(전기역학) 계속 1987. 8. 29

(가) $t>0$ 에서 강체 속의 자기장 $\vec{H}$ 의 시간변화를 나타내는 미분방정식을 유도하라.

(나) $\vec{H}(\rho, t)$ 의 해를 구하라. 단 해를 급수형태로 구하되 각항의 계수들은 구하지 않아도 좋다.

(참고) 원주 좌표계에서

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

이고 미분방정식

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0$$ 의

해는 Bessel 함수 $J_\nu(x)$ 이다. 또 $J_0(x_{0m}) = 0$ 의 해는 $x_{01} = 2.405$, $x_{02} = 5.520$, ⋯ 등으로 주어진다.

(다) $t \to \infty$ 일때 자기장의 감소를 나타내는 "characteristic decay time" 을 구하라. 또 $\left|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| \ll |\vec{J}|$ 라는 가정을 $a = 10^{-3}\,m$, $\sigma = 0.5 \times 10^{8}\,(\Omega\text{-}m)^{-1}$ 인 경우에 대하여 확인하여라. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A$)

— 끝 —

물리학과 대학원 자격시험 I

양자역학 1987. 8. 29

1 다음과 같은 일차원 potential well을 고려하자.

$$V(x) = \begin{cases} 0 , & -L \le x \le L \\ \infty , & |x| > L \end{cases}$$

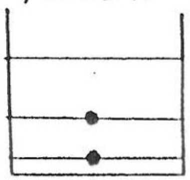
(가) 이 potential well 속에 있는 질량 m인 입자에 대한 에너지 고유치와 고유함수를 구하라.

(나) 초기순간 $t=0$에 한 입자의 파동함수가

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{L} , & -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2} \\ 0 , & x > \left|\frac{L}{2}\right| \end{cases}$$

이었다고 하자. 이 입자의 에너지를 측정해서 에너지 값이 $E = \frac{9\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$ 이 될 확률을 구하라.

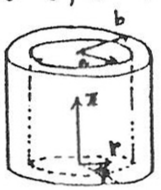
(다) 질량 m인 두 identical particle이 위의 potential 속에 들어있다. 두 입자는 spin 0인 보존이다. 두 입자 사이의 상호작용이 없는 경우 이 계의 first excited state (그림 참조)에 대한 에너지 고유치 및 파동함수를 구하라. 이 입자들 사이에 $V_0\delta(x_1-x_2)$의 상호작용이 존재하면 그 에너지는 얼마나 변하는가? (1차 섭동만 고려할 것.)



(first excited state configuration)

(라) 위의 (다)번 문제를 두 입자가 spin 1/2인 fermion인 경우에 대해서 풀어라.

2. 그림과 같이 반경 a와 b 사이의 원통에 갇혀있는 하나의 전자를 생각하자. 만일 균일한 외부의 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$가 그림에서와 같이 $r<a$인 영역에만 존재하고, $a<r<b$인 영역에는 들어가지 못한다고 하자. (단 b는 a와 거의 같다고 하자.)

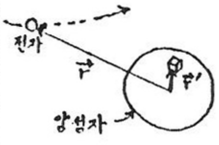


(가) 전자의 r, z 방향의 운동을 무시하는 경우 이 전자의 Hamiltonien은 $H = (p_\phi - \frac{e}{c}A)^2/2m$ 로 쓸 수 있음을 보여라. 여기서 $A = Br/2$ 이다.

(나) 원통안에 갇혀있는 전자의 에너지가 $E_n = (n - \frac{\Phi}{\Phi_0})^2 \hbar^2/2ma^2$ 이 됨을 보여라. 단 $\Phi_0 = hc/e$, $n = \pm1, \pm2, \cdots$, 그리고 Φ는 $0<r<a$ 사이의 전자속(total flux)을 나타낸다.

(다) 위에서 얻은 양자론적 결론이 고전적으로 취급하였을 때와 다른점을 논하라.

3. 높은 에너지를 가진 전자와 양성자의 탄성 충돌 실험에 의하여 양성자의 전하분포를 알고자 한다. 전자의 스핀은 무시하고, 비상대론적 이론의 Schrödinger 방정식을 이용하여 실험결과를 분석해 본다.



(가) 양성자의 전하분포를 $e\rho(\vec{r}')$ 이라하고 전자의 위치를 $\vec{r}$ 이라하며, 전자는 점입자로 간주할때, 전자의 운동에 대한 Schrödinger 방정식을 쓰고, 특히 양성자에 의한 포텐셜을 명기하라. 이 포텐셜의 Fourier 변환이

$$\tilde{V}_{\vec{q}} = -\frac{4\pi e^2}{q^2}\int d^3\vec{x}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\rho(\vec{x}) = -\frac{4\pi e^2}{q^2}\tilde{\rho}_{\vec{q}}$$

임을 보여라.

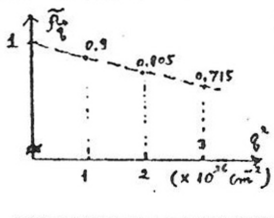
만일 양성자도 점입자라면 $\tilde{V}_{\vec{q}}$는 어떻게 되겠는가?

(나) 양성자가 점입자일 경우의 Born 근사에 의한 탄성 충돌 단면적을 $(d\sigma/d\Omega)_0$ 라고 하면, 전하분포가 있는 양성자의 충돌단면적 $d\sigma/d\Omega$가 Born 근사를 사용하여

$$d\sigma/d\Omega = (d\sigma/d\Omega)_0 \, |\tilde{\rho}_{\vec{q}}|^2$$

임을 보여라. 여기서 $\hbar\vec{q}$는 전자의 충돌전과 충돌후의 운동량차이이다.

(다) 양성자의 전하분포가 구형대칭이라고 가정하면,



$\tilde{\rho}_{\vec{q}}$가 q^2의 함수인 것을 보이고, 양성자의 전하분포의 r.m.s. 반경

$$r_{r.m.s.} \equiv \left[\int d^3\vec{r}\, r^2 \rho(r)\right]^{1/2}$$

을 위의 실험 결과로 부터 구하라.

(Hint; q^2이 적은 극한에서 $\tilde{\rho}_{\vec{q}}$를 고찰할것)

<끝>