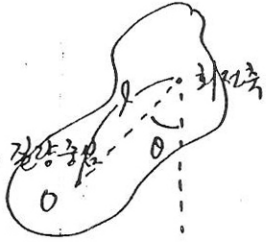


물리학과 대학원 자격시험 I

과목명: 역학

1988. 2. 27.

1) 그림과 같이 주어진 중력장 내에서 고정된



수평축을 회전축으로 하여
진동하는 질량 M 인
복합진자 (Compound
Pendulum) 가 있다.

이진자의 질량중심 O

에 대한 주관성 모멘트 축 (principal axes of inertia
tensor) 을 $\hat{e}_i$, 주관성 모멘트 (principal
moments of inertia) 을 I_i ($i=1,2,3$)
라 하자. 회전축에서 질량 중심까지의 수직거리를
 l , 질량 중심의 수직면에서의 회전각을 θ 라
둘 때 다음에 답하라.

a) 질량 중심 O 에 대한 순간회전축 (instantaneous
axis of rotation) 과 주관성 모멘트 축이 이루는
각을 α_i ($i=1,2,3$) 라 할 때 질 O 에 대한
각운동량 $\vec{L}$ 을 $\hat{e}_i$ 로 표시하라.

b) 이진자의 운동 에너지와 위치 에너지를 구하라.

c) 이진자의 Lagrange 운동방정식을 세라.

d) 이진자가 평형위치에서 미세 진동을 할 때
각진동수 ω 를 구하라.

2) Hamiltonian 이 $H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$
(p, q 는 일반화 운동량 및 좌표) 로 주어지는
계를 생각하라.

a) Hamilton 의 방정식을 세라.

b) phase space 에서 양의 volume
element 가 시간의 따라 불변임을 증명
하라.

c) generating function F 가

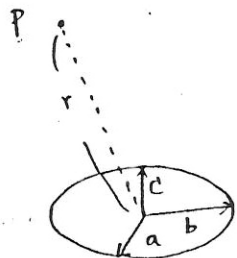
$F(q, Q) = \frac{\omega}{2} q^2 \cot Q$ 로 주어지는
canonical transformation 을 할 경우
(p, q) 를 (P, Q) 로 표시하라.

d) 이 변환에 의해 얻어지는 새로운
Hamiltonian 을 (P, Q) 로 표시해
고해라.

이 목 명 : 전 기 역 학

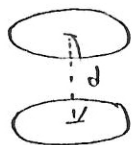
1988. 2. 27.

- [1] 그림과 같은 타원체 ($a=b>c$) 모양의 절연체에 $+e$ 만큼의 전하가 모든 부피에 균일하게 분포되어 있고, 그 중심에는 $-e$ 의 점전하가 있다고 하자. (따라서 net charge는 zero이다)

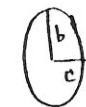


(가) $r \gg a$ 인 점 P에서의 전기적 potential을 multipole expansion하여 구할 때, 최초의 non zero 항을 구하라.

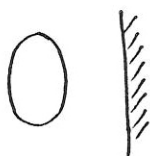
(나) 이러한 타원체 2개가 그림과 같이 중심거리 d 만큼 떨어져 놓여 있다고 하자. 이때 두 타원체 사이에 작용하는 정전기력을 다음과 같은 $F = \sum \frac{C_n}{d^n}$ 식으로 나타낼 때, $C_n \neq 0$ 인 가장 작은 n 값을 구하고, 이 항에 의한 힘이 인력인가 척력인가를 밝히라.



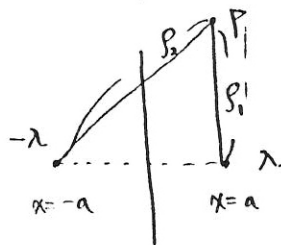
(다) 위의 타원체 중 하나를 A 축을 중심으로 90° 회전시켜 옆의 그림과 같이 놓았을 때, 위 (나) 번의 질문에 답하라.



(라) 타원체가 접지된 conductor 앞에 그림과 같이 놓였을 때, 힘이 인력인가 혹은 척력인가?



- [2] 그림과 같이 단위 길이당 전하 밀도가 λ 및 $-\lambda$ 인 두 개의 평행선이 $x=a$ 및 $x=-a$ 의 위치에서 있다.



(가) 점 P에서의 전기적 potential을 구하라. 이때 S_1, S_2 는 각 선전하 (line charge) 독로부터의 거리이다.

(나) 등전위선이 만족시키는 식을 써라.

(다) 위의 결과를 이용하여, 반경 R이며 축간의 거리가 D 인 두 평행원통의 단위 길이당 capacitance를 구하라.

- [3] 공기중 ($\epsilon=\mu=1$)에서의 Maxwell 방정식을 생각하자.

(가) 전장 $\vec{E}$ 가 있는 공간에서의 electrostatic energy density를 $\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ 으로 쓸수 있음을 보이라.

(나) 단위시간당 어떤 면 $\vec{A}$ 를 통해나가는 전자기 에너지는 Poynting vector $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$ 와 $\vec{A}$ vector와의 내적으로 주어진 것을 보이라.

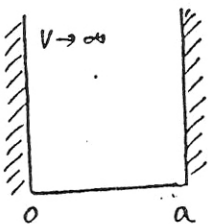
(다) conductivity가 σ 이고, 단면적이 a 인 금속 wire에 전류 I가 흐르고 있다. 이때 wire 표면에서의 Poynting vector 크기와 방향을 구하라. 또한 이 wire의 길이 L인 부분에 들어오는 전자기 에너지는 Joule heat loss 와 같음을 보이라.

과목명: 양자 역학

1988. 2. 27.

[1] 그림과 같은 무한 포텐셜 벽에 갇혀 있는 입자를 생각하자.

(a) 한 입자가 바닥 (ground) 상태에 있다고 하자. 만일 이 포텐셜 벽을 $2a$ 로 늘리는 경우, 그 입자의 에너지가 변하지 않을 확률을 구하라.



(나) 앞서와 같이 포텐셜 벽을 늘릴 때, 그 입자가 에너지는 같은 확률과 같은 확률을 각각 구하라.

(다) 위 그림의 포텐셜 벽에 두개의 동일한 spin 1/2인 fermion을 넣을 때, 바닥 상태의 에너지와 고차항을 구하라.

(라) 다시 포텐셜 벽을 $2a$ 로 늘리는 경우, 이 두 fermion으로 이루어진 계가 같은 에너지를 유지할 확률과 가장 낮은 에너지 상태로 떨어질 확률은 각각 구하라.

[2] (a) 한 물리적 계의 상태함수를 $|\psi\rangle$ 로 나타낼 때, 그 계의 밀도 연산자는

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

로 주어진다. 이 계의 기저 벡터 (basis vector) 곧 $|\phi_i\rangle$ 로 나타낼 때, 연산자 Ω 의 기대치는

$$\langle\Omega\rangle = \text{Tr}(\Omega\rho)$$

가 됨을 보이라. (여기서 Tr 은 trace를 나타냄)

(나) 마일 물리적 계가 여러 상태 $|\psi^{(i)}\rangle$ 로 이루어져 있고, 그 상태에 있는 확률이 $w^{(i)}$ 라고 하면, 밀도 연산자 ρ 는 $\rho = \sum_i w^{(i)} |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|$ 로 주어진다. 연산자 Ω 의 이 계에 대한 (ensemble) 기대치는 $\langle\Omega\rangle = \text{Tr}(\Omega\rho)$ 가 됨을 보이라.

(다) 100개의 전자들로 이루어진 전자빔 (ensemble)을 생각하자. 그 중 80개는 z 방향의 스핀이 $+\frac{1}{2}$ 이고, 20개는 $-\frac{1}{2}$ 이라 한다면, 이 전자빔의 밀도 연산자를 써라. S_z 의 기대치 $\langle S_z \rangle$ 는 얼마가 되는가?

(라) Hamiltonian H 가 시간에 대해 변하지 않을 때, 밀도 연산자 ρ 의 시간에 대한 변화율은

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]$$

가 됨을 보이라.

[3] (a) 두 상태로 이루어진 계가 처음에는 같은 에너지 상태 $E=0$ 에 있다고 하자. 두 상태 사이에 포텐셜 V (V 는 상수)가 작용할 때, 축퇴된 (degenerate) 에너지는 어떻게 갈라지는가? 이때 에너지 고차 벡터는 어떻게 되겠는가?

(뒷페이지 계속)

과목명: 양자 역학

1988. 2. 27.

3. (나) 세 상태도 이루어진 계가 Hamiltonian

$$H = \begin{pmatrix} 0 & V & V \\ V & 0 & V \\ V & V & 0 \end{pmatrix}.$$

에 대하여 기술된다고 하자. 이때
에너지 고유치와 고유상태를 구하라.

(다) Hamiltonian 이 $m \times m$ 행렬로
다음과 같이 주어진다고 하자.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & V & V & \dots & V \\ V & 0 & V & \dots & V \\ V & V & 0 & \dots & V \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V & V & V & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

V 가 0 보다 작을 때, 바닥 (Ground)
상태 에너지는 $(m-1)V$ 가 되고,
들뜬 (excited) 상태는 $(m-1)$ 번
축퇴된 (degenerate) $-V$ 의 에너지를
가짐을 보여라.

(따라서 m 이 커짐에 따라 두 상태
사이의 에너지 간격이 멀어지며 기저
에너지가 낮아진다).

— 끝 —