1. 어떤 벡터 operator f_i 가 각운동량 연산자 L_i 와

$$[L_i, f_j] = i\varepsilon_{ijk} f_k$$

의 관계를 만족할 때 다음 물음에 답하라. 여기서 ε_{ijk} 는 $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$, $\varepsilon_{112} = \cdots = 0$ 이다.

(가) $\vec{L}$ 에 대한 고유상태를 $|n, L, M\rangle$ 이라 하고 (여기서 n 은 다른 양자수),

$$(f_i)_{M_1, M_2} \equiv \langle n, L, M_1 | f_i | n, L, M_2\rangle$$

라 하면 $M \neq M'$ 에 대해 $(f_z)_{M', M} = 0$ 임을 보여라.

(나) $[L_+, f_+] = 0$ 을 이용하여

$$\frac{(f_+)_{M+2, M+1}}{(f_+)_{M+1, M}} = \frac{(L_+)_{M+2, M+1}}{(L_+)_{M+1, M}}$$

을 유도하라. 참고로 $f_\pm \equiv f_x \pm i f_y$ 이며

$$L_\pm |n, L, M\rangle = \sqrt{(L \mp M)(L \pm M + 1)}\, |n, L, M \pm 1\rangle$$

이다.

(다) $\vec{f} = a(n, L)\vec{L}$ 라고 쓸 때 계수는

$$a(n, L) = \frac{\langle n, L, M | \vec{f}\cdot\vec{L} | n, L, M\rangle}{L(L+1)}$$ 이다.

$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ 의 고유상태 $|l_1, l_2, L, M\rangle$ 에 대한 벡터 연산자 $\vec{\mu} \equiv g_1 \vec{l}_1 + g_2 \vec{l}_2$ 의 기대치를 구하라.

2. 일차원의 공간에서 거의 자유롭게 움직이는 전자가 주기 a (=lattice constant)인 약한 포텐셜 $V(x)$, 즉 $V(x+a)=V(x)$, 의 영향아래 있는 문제를 살펴 보고자 한다. 전자의 해밀토니안을 $H=H_0+V(x)$로 쓰고 이때 H_0의 해는 자유전자에 대한 것이다.

(가) H_0의 고유 상태가

$$H_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle$$

로 주어질 때, H의 고유치 E_n은 행렬식

$$\mathrm{Det}\left|(E_k^{(0)}-E_n)\delta_{k,n} + \langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle\right| = 0$$

을 만족시킴을 보여라.

(나) H_0의 고유함수는 편의상 자유전자가 $L=Na$ (N은 충분히 큰 정수)인 1차원 상자 속에 있다고 하고

$$\psi_k^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ikx}$$

로 택할 수 있다. $\psi_k^{(0)}$의 축퇴를 논하라.

(다) 주기적 포텐셜은 Fourier 전개하여 $V(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{2\pi inx/a}$로 놓을 수 있다. $k\neq\frac{n\pi}{a}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$인 경우 에너지 준위는 어떻게 되는가? 이 상태는 축퇴되어 있는가? 또, $k=\frac{n\pi}{a}$인 경우 에너지를 구하면 어떻게 되는가? k에 따른 E의 함수꼴을 그려 보아라.

3. 수소분자의 전자 상태를 생각하기 위하여, 먼저 위치 $\vec{R}_1$에 양성자 하나만이 놓였을 때의 전자 하나의 바닥상태(공간부분)를 $\phi_1(\vec{r}_1)$으로 표시하고 $\vec{R}_2$에 양성자 하나만 놓였을 때 전자 하나의 바닥 상태를 $\phi_2(\vec{r}_2)$라 하자. 이제 두 양성자가 $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$에 놓였을 때의 두 전자의 상태함수의 공간부분 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$를 다음의 두 가지로 근사하기로 한다.

$$\psi_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2) + \phi_2(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\right)$$

$$\psi_b(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2) - \phi_2(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)\right)$$

(가) 상태함수의 공간부분 ψ_a와 ψ_b에 대응하는 spin 부분을 ↑(spin up)과 ↓(spin down)의 부호를 활용하여 표시하라.

(나) 두 양성자가 각각 위치 $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$에 고정되어 있다고 할 때

이 두 전자계의 해밀토니안과 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ 가 만족해야 할 Schrödinger 방정식을 쓰라.

(다) ψ_a 의 에너지 기대치를 E_a, ψ_b 의 에너지 기대치를 E_b 라 할 때

$$E_a - E_b = 2K,$$

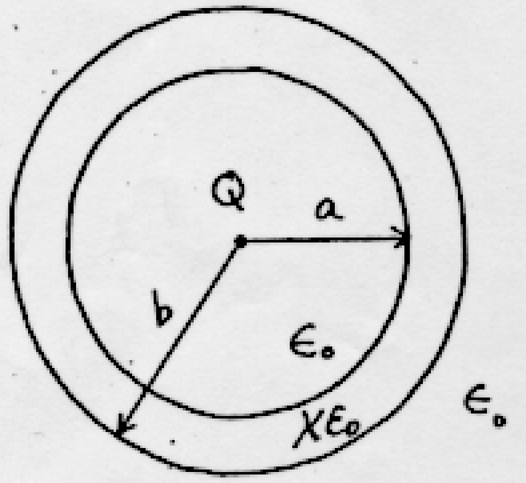
$$K \equiv \int d^3r_1 d^3r_2 \, \phi_1^*(\vec{r}_1)\phi_2^*(\vec{r}_2) \cdot \left(\frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_2|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_1|}\right) \cdot \phi_2(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)$$

임을 보여라. 단 $\vec{R}_1$과 $\vec{R}_2$ 는 충분히 떨어져 있어서

$\left|\int d^3r \, \phi_1^*(\vec{r})\phi_2(\vec{r}_2)\right|$ 의 제곱항 이상은 무시할 수 있다

~~시할 만큼 작다.~~

1. 안쪽 반지름이 a, 바깥 반지름이 b 인 유전체로 된 구껍질 (dielectric shell) 의 중심에 점전하 Q 가 있는 경우를 생각하자.



진공중의 유전상수를 ϵ_0, 유전체의 유전율을 χ 이라고 하고 다음 물음에 답하라.

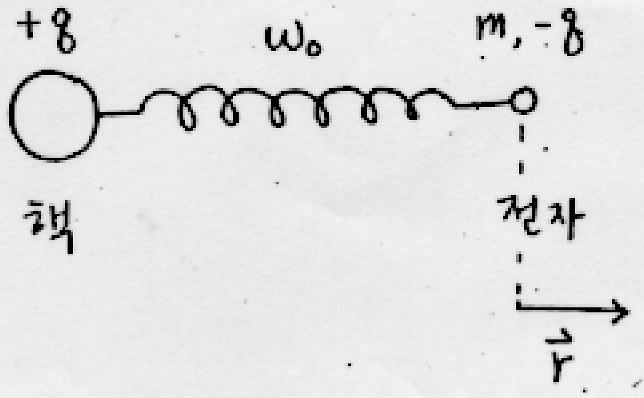
(가) 전기장의 세기를 중심으로 부터의 거리 $r<a$, $a<r<b$, $r>b$ 인 곳에 대해서 각각 구하라.

(나) 구껍질의 유전분극 (polarization) 을 r 의 함수로 구하라.

(다) 유전분극에 의한 구껍질의 체 전하 밀도 (volume charge density) $\rho_v = 0$ 임을 보여라.

(라) $r = a$ 와 $r = b$ 에서의
표면전하 밀도를 각 각 구하라.

2. 비자성, 비전도성의 유전체를 그림과 같은 고전적 dipole oscillator 들의 모임으로 생각하고자 한다.



이 dipole 의 고유 각 진동수를 ω_0, damping 상수를 γ, 전자의 질량을 m, 전하를 $-q$ 라 하고 핵은 무거워서 움직이지 않는다고 가정한다.

(가) 전장 $\vec{E}$ 및 자장 $\vec{B}$ 가 이 계에 작용할 때 평형위치로 부터의 전자의 변위 $\vec{r}$ 에 대한 운동방정식을 구하라.

(나) $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, $\vec{B} = 0$ 일 때 위의 운동 방정식의 정상상태 해 (steady state solution)를 구하라. ($\vec{E}_0$는 변위 $\vec{r}$과 평행인 것으로 가정한다.) 이로부터 전기장에 의해

유도된 dipole moment $\delta\vec{p}$ 는

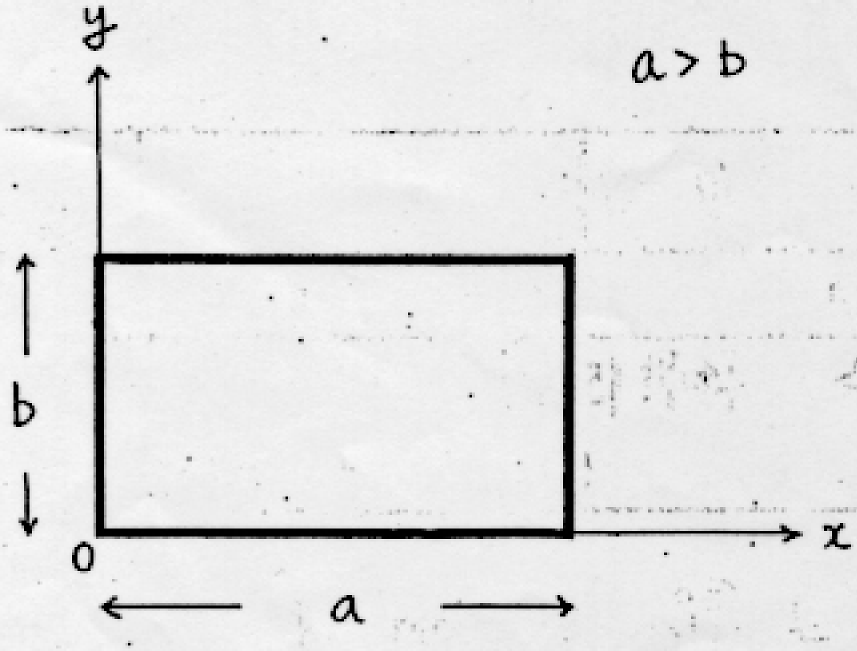
$$\delta\vec{p} = \frac{q^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\,\vec{E}_0\, e^{i\omega t}$$

가 됨을 보여라.

(다) 유전체 속에는 고유진동수가 ω_{0n}, damping 상수가 γ_n 인 dipole 이 f_n 의 비율 (즉, $\sum_n f_n = 1$) 로 들어 있다고 할 때 단위 부피당 N 개의 dipole oscillator 들로 이루어진 유전체의 유도분극 (induced polarization) $\vec{P}$ 는 얼마인가?

(라) 이 유전체의 복소굴절율 $n(\omega) = n_r(\omega) + i\,n_i(\omega)$ 를 구하라.

3. 단면이 그림과 같은 도파관 (waveguide) 내의 전자기장을 생각한다. Waveguide 의 내부는 진공이며 벽면도체의 전기 전도도는 무한대라고 가정한다.



(가) 전자기장의 시간과 위치에 따른 변화를

$$\vec{E}(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{H}(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

로 놓을 때 전자기장의 성분 $E_\alpha(x,y)$ 와 $H_\alpha(x,y)$, $(\alpha = x, y, z)$ 를 결정하는 Maxwell 방정식을 성분별로 써라.

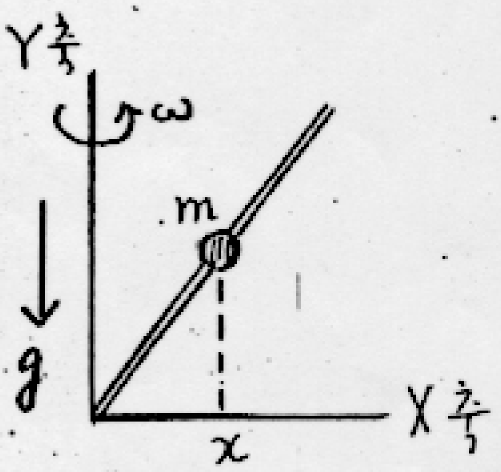
(나) $x=0$ 와 a, 그리고 $y=0$ 와 b 에서 전자기장이 만족해야 할 경계조건들을 각각 적어라.

(다) TE mode 는 $E_z = 0$ 인 해이다. TE mode 에서 $\psi = H_z(x,y)$ 의 가능한 해 $\psi_{m,n}$ 을 구하라.

(라) (다)의 $\psi_{m,n}$ 에서 각 mode 의 cut-off 주파수 $\omega_{m,n}$ 을 구하고 그 의미를 적어라.

(마) (라)에서 가장 낮은 cut-off 주파수를 갖는 $TE_{1,0}$ mode 에 대하여 $\vec{E}(x,y)$ 및 $\vec{H}(x,y)$ 의 각 성분을 구하라.

1. 그림과 같이 $y = kx$ ($x > 0$) 형태를 지닌 철사줄에 질량 m의 구슬이 마찰없이 움직이도록 꿰메어져 있다. 이 철사줄은 연직인 Y축 주위로 각속도 ω로 회전하고 있으며 중력의 가속도는 g 이다.



(가) 구슬의 Lagrangian 을 쓰고 그 운동방정식을 구하라. (변수 x는 철사줄과 함께 회전하는 좌표계의 X 좌표로 생각하라)

(나) 구슬의 수평방향운동이 potential energy

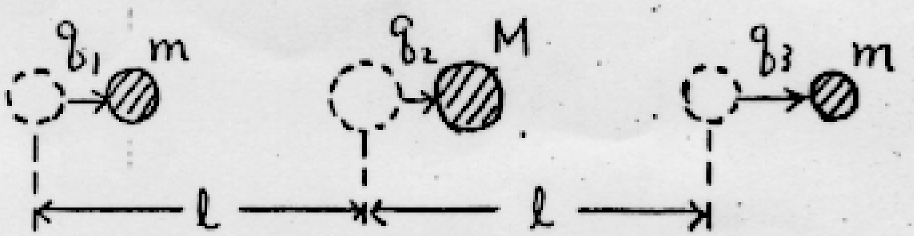
$$U' = \frac{1}{1+k^2}\left(mgkx - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)$$

로 주어진 일차원 운동과 같음을 보이라.

(다) 구슬이 철사줄로부터 받는 힘을 x의 함수로 구하라.

(라) 운동방정식의 일반해를 구하고 초기조건 $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ 로 주어질 때의 운동을 기술하라. 특히 $v_0 = \frac{\gamma k g}{\omega^2}$ ($\gamma \equiv \frac{\omega}{\sqrt{1+k^2}}$) 인 경우의 운동을 논의하라.

2. 그림과 같이 1차원 배열을 지닌 3원자 분자계의 진동 mode를 고전역학적



으로 살펴보려 한다. 원자 1, 2, 3의 질량은 $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = M$ 이며 각각 평형거리 l 만큼 떨어진 원자 1~2 사이와 원자 2~3 사이의 힘의 상수 (coupling constant)는 k로서 서로 같다. (원자 1과 3 사이의 직접적인 상호작용은 없는 것으로 한다)

(가) 1차원 변위 q_1, q_2, q_3 에 대한 계의 Lagrangian을 쓰고 그 운동방정식을 구하라.

(나) 이들 변위를 조화진동으로 보고 그 고유진동수와 고유변위를 구하라.

(다) 각 고유진동수에 대응하는 진동 mode를 그림으로 설명하라.