[양자역학: 문제 1] 결정상태의 고체 안에 있는 전자 (spin = 1/2) 가 느끼는 위치 에너지는 근사적으로

$$V = V_o(|\vec{r}|) + a(J_x^2 - J_y^2)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 를 의미하고

$$J_\pm |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j, m\pm 1\rangle$$

이다. 위치 에너지의 첫 번째 항은 구대칭의 Coulomb potential 을 나타내고 두번째 항은 주변의 결정구조에 의한 영향을 나타내는 소위 crystal field potential을 나타낸다. 일반적으로 이 crystal field potential 은 coulomb potential 보다는 매우 작아 섭동적으로 다룰 수 있다. 이때 다음 각 질문에 답하라.

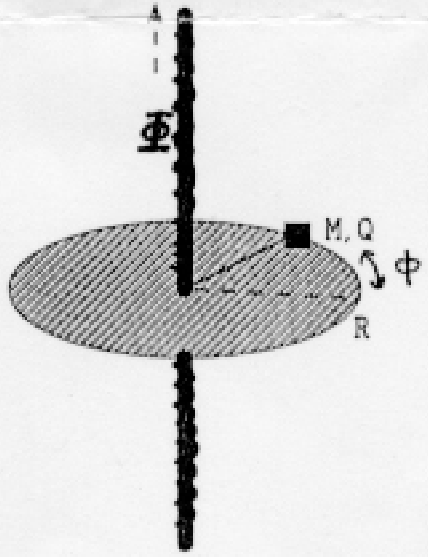
(1) crystal field 섭동항에 의한 S-state (ℓ = 0) 전자의 에너지 준위 변화량을 구하라.

(2) p-state (ℓ=1) 전자의 에너지 준위를 degenerate time-independent perturbation 이론으로 계산하여라.

(3) 초기 t = 0 일 때 전자가 $|j,m\rangle = |3/2, 3/2\rangle$ 인 상태에 있었다고 하자. t > 0 일 때 이 전자가 $|j,m\rangle = |3/2,3/2\rangle, |3/2,1/2\rangle, |3/2,-1/2\rangle, |3/2,-3/2\rangle$ 에 있을 확률을 각각 구하여라.

2차 $|0,0\rangle|\frac{1}{2}\ \pm\frac{1}{2}\rangle$

[양자역학:문제 2] 반경 R 인 원형고리 위에 자유롭게 움직이는 질량 M, 전하 Q 인 입자가 있다. 이 고리의 중심축을 따라 고리의 평면에 수직으로 아주 가느다란 그리고 무한히 긴 solenoid 를 놓았다. 이 solenoid는 그 내부에 균일한 자력선속 Φ 를 유지하고 있다. 이 때 전하를 띤 입자의 운동은 고전적으로는 solenoid의 유무에 관계하지 않지만 양자역학에서는 다른 결과가 나옴을 이론적으로 예측하였고 이후 실험적으로 검증 되었다. 이 상황에 관하여 다음 질문에 답하라



(1) 먼저 solenoid 가 없을 때 위의 그림과 같이 각도 ϕ 를 전하입자의 좌표로 파동함수 $\Psi(\phi)$가 만족하는 슈뢰딩거 방정식을 구하라. 파동함수의 경계조건은 $\Psi(2\pi + \phi) = \Psi(\phi)$ 임을 알 수 있다. 이로부터 이 입자의 에너지 준위와 고유파동함수를 구하여라.

(2) 앞서 설명한 바와 같이 solenoid가 있을 때의 슈뢰딩거 운동방정식을 구하라. 이를 풀기 위하여 새로운 파동함수 $\Phi(\phi) = \exp\left(i\frac{QR}{\hbar c}\int_0^\phi A_\phi(\phi')d\phi'\right)\Psi(\phi)$를 도입할 수 있다. 파동함수 $\Phi(\phi)$의 경계조건은 어떻게 바뀌나? 이로부터 에너지 준위들을 구하고 solenoid가 없었던 (1)의 경우와 비교하여 어떤 차이가 있는지 논의하라.

(3) (2)의 결과로 부터 만일 $Q\Phi/2\pi\hbar c$ 의 값이 정수에 해당하면 에너지 준위는 solenoid가 없었던 (1)의 에너지 준위와 정확히 일치함을 알 수 있다. 그 이유를 물리적으로 간략히 설명하여 보라.

[양자역학: 문제-3] z-축 방향으로 입사한 평면파 파동함수 $\phi_i = e^{ikz}$ 가 단거리 포텐샬 $V(\vec{r})$ 에 의하여 산란되어 나가는 파동함수를

$$\phi_o = \exp(ikz) + f(\theta)\frac{\exp(ikr)}{r}$$ 과 같이 표현할 수 있다.

(1) 먼저 슈뢰딩거 방정식을 만족하는 파동함수는 일반적으로

$$\Psi(\vec{r}) = \exp(ikz) + \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}-\vec{r}')V(\vec{r}')\Psi(\vec{r}')$$

으로 쓸 수 있음을 보여라. 여기서 $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ 는 총 에너지이고 그린함수 (Green Function) $G(\vec{r}-\vec{r}')$ 은 $(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + E_k)G(\vec{r}-\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ 을 만족한다.

(2) 이 산란 문제에서

$G(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 임을 유도하라.

(3) 위의 결과들을 이용하여 포텐샬의 영향이 없어진, 충분히 멀어진 거리에서의 산란 진폭 $f(\theta)$ 를 구하고 본 근사 (Born Approximation)를 취하여라.

(4) 전하분포를 가진 포텐샬은 $V(\vec{r}) = e^2\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}'$ 으로 표시 된다. 이 때의 산란 진폭 $f_\rho(\theta)$ 를 점전하 만 있을 때의 산란진폭 $f_1(\theta)$ 와 비교하여 보고 그 차이를 전하밀도 ρ 로 표시하라.

$Nk[\ \ln\frac{V}{N}$

[열통계: 문제-1] 부피가 V_i 에서 V_f 로 변화하는 다음의 과정에서 엔트로피 ($dS = dQ/T$) 의 변화를 각각 구하여라.

(1) 온도 T 에서 등온팽창하는 단원자로 된 이상기체 1 몰(mol)의 엔트로피 변화

(2) (1)에서 이상기체와 열적 접촉을 하고 있는 열저장고 (heat reservoir)의 엔트로피 변화

(3) (1)에서 이상기체와 열저장고의 총 엔트로피 변화

(4) 일을 하지 않고 자유팽창하는 온도 T 의 이상기체 1몰의 엔트로피 변화

(5) 압력 P 의 등압과정에 의한 이상기체 1몰의 엔트로피 변화

[열통계: 문제-2] 전염병이 퍼지는 현상을 다음과 같은 간단한 모형으로 다루어 보자. N 명의 집단에서 j-번째 사람이 건강하면 $t_j = 0$, 병이 들면 $t_j = 1$ 로 나타내고, 그가 병이 들면 i-번째 사람에게 V_{ij}($V_{ij} = V_{ji} = V_{i+n,j+n}$) 만큼의 병원체를 퍼뜨린다고 하자. 이 때 i-번째 사람이 병에 걸리는 것은 주위의 병든 사람들로 부터 그에게 퍼뜨려진 병원체의 전체양 V_i($V_i = \sum_j V_{ij} t_j$) 과 자신의 저항력 W_i 의 차이에 의하여 결정된다. 건강했어도 $V_i > W_i$ 이면 병에 걸리게 되고 병에 걸렸어도 $V_i < W_i$ 이면 다시 건강해진다.

(1) 이 계는 $H = -\sum_{i<j} \overline{V}_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i s_i$ 의 해밀토니안으로 기술된다. i-번째 사람의 상태가 변화할 때 H 는 '언제나 감소함'을 보여라. 여기서 $s_i = 2t_i - 1$ 은 이징 스핀(Ising spin)이고 $J_{ij} = V_{ij}/2$, $h_i = \sum_j V_{ij}/2 - W_i$ 이다.

(2) 시간 t 에서 이 계의 상태 $S = (s_1, \ldots, s_N)$ 의 확률 $P(S,t)$ 가 다음의 으뜸 방정식 (Master Equation)을 만족한다고 하자.

$$\frac{d}{dt}P(S,t) = -\sum_i[\ \omega_i(s_i)P(S,t) - \omega_i(-s_i)P(S_{-i},t)]$$

여기서 $S_{-i} = (s_1, \ldots, -s_i, \ldots, s_N)$이며 $\omega_i(s_i)$ 는 i-번째 사람의 상태가 s_i 에서 $-s_i$ 로 바뀌는 전이율(Transition Rate)로 시간상수 τ, 문턱너비 $\frac{1}{\varepsilon}$인

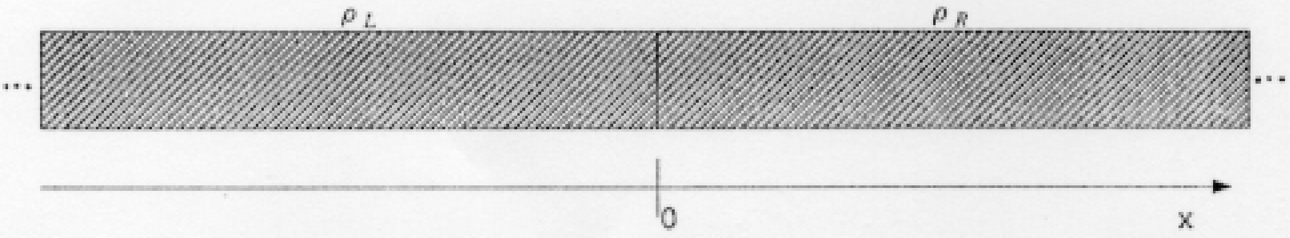
$$\omega_i(s_i) = \frac{1}{\tau}(\exp[2\varepsilon s_i(V_i - W_i)] + 1)^{-1} = \frac{1}{2\tau}[1 - s_i \tanh\varepsilon(V_i - W_i)]$$

의 페르미 함수꼴을 가진다. 이 계의 평형상태 역시 (1)의 해밀토니안으로 기술되고 그 온도는 $\frac{1}{k\varepsilon}$ (k = 볼츠만 상수 (Boltzmann Constant)) 임을 보여라.

(힌트: 세부 균형 (detailed balance) 조건을 이용하여 평형상태에서 확률 $P_{eq}(S) \propto e^{-\varepsilon H(S)}$ 이 위의 으뜸방정식의 정상풀이임을 보이면 된다.)

(4) $h_i = 0$ 일 때 (3)에서 얻은 식에 평균마당어림 (Mean-Field Approximation)을 써서 ε 의 고비값 (Critical Value)을 구하라.

[역학: 문제-1] 밀도가 다른 두 종류의 균일한 밧줄이 아래 그림과 같이 연결되어 있다. 그림에서 x 는 두 밧줄의 접속부분을 원점으로 하는 밧줄길이의 매개변수이며 t 는 시간을 나타내는 매개 변수이다.



밧줄의 길이는 무한대, 왼쪽과 오른쪽 밧줄의 단위길이당 질량밀도는 각각 σ_L , σ_R , 밧줄 전체에 걸리는 장력(tension)은 τ=T 로 일정하고 밧줄은 수직 방향으로 진폭 $\phi(x,t)$의 운동만을 한다고 하자. 이때 다음 각 질문에 답하라.

(1) 이 밧줄의 운동을 기술하는 라그랑지안은 다음과 같이 주어진다.

$$L=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left[\frac{1}{2}\sigma(x)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\ ;\qquad \sigma(x)=\sigma_L\theta(-x)+\sigma_R\theta(x)$$

이 라그랑지안의 첫번째 항과 두번째 항은 물리적으로 각각 밧줄의 어떤 에너지를 의미하는가? 그리고 진폭 $\phi(x,t)$의 공액 운동량 (conjugate momentum) 밀도와 이를 이용하여 해밀토니안 H 를 유도하여라.

(2) 위의 라그랑지안 혹은 해밀토니안으로 부터 진폭 $\phi(x,t)$의 운동방정식을 유도하여라. 그리고 경계면 x = 0 에서의 진폭의 경계조건을 구하여라.

(3) 이 밧줄의 왼쪽 끝에서 오른쪽으로 진행하는 다음과 같은 파동이 있다.

$$\phi(x,t)=Re[A\exp(ikx-i\omega t)]\qquad(x\le 0)$$

이 입사 진폭은 두 밧줄의 경계면 x=0에서 반사 진폭 $\phi_r(x,t)$ 과 투과 진폭 $\phi_t(x,t)$으로 나뉠 것이므로 다음과 같이 분해할 수 있다.

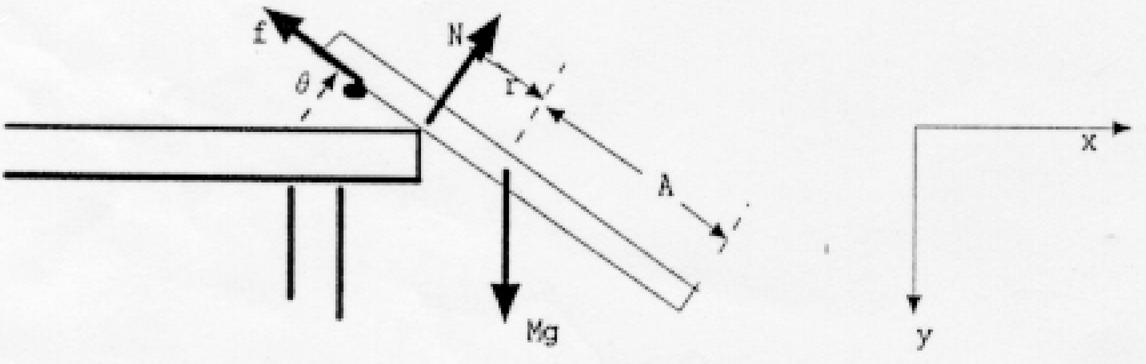
$$\phi_t(x,t)=Re[B\exp(iqx-i\omega t)]\qquad(x\ge 0)$$
$$\phi_r(x,t)=Re[C\exp(-ikx-i\omega t)]\qquad(x\le 0)$$

(2)에서 구한 운동방정식, 경계 조건들을 이용하여 계수 B, C 를 A, σ_L, σ_R 로 표시하라.

(4) $\sigma_L \ll \sigma_R$, $\sigma_L \gg \sigma_R$ 각각의 극한에서 반사된 파동은 입사한 파동에 비하여 얼마나 위상차이를 가지나?

[역학 : 문제 2] 일상 생활중 버터를 바른 식빵을 실수로 식탁모서리로 밀려 바닥에 떨어뜨리면 거의 매번 버터를 바른 면이 바닥에 닿는 경험을 하게 된다. 물리적으로 이는 식탁 높이 만큼 자유낙하한 빵의 회전각이 90^0에서 270^0 사이가 되기 때문이다. 이 현상을 정량적으로 (i) 모서리에서의 회전운동, (ii) 모서리에서의 미끄러짐 및 회전 운동, (iii) 회전하며 자유낙하하는 운동의 세 단계로 분석하여 보자.

(i),(ii) 단계의 운동을 하는 동안 아래 그림과 같이 질량 M, 폭 L, 길이 2A 인 얇은 식빵이 걸쳐 있다고 하자. 편의상 식빵은 질량 M = 1, 중심에 대한 moment of inertia가 $I=\frac{1}{3}A^2$인 강체라고 볼 수 있으며, 식빵이 닿는 모서리를 원점으로 설정하고 일반화 좌표 (r,θ) 를 도입하면 식빵의 질량 중심 좌표는 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ 이다. 또 그림에서 N 은 수직항력, g 는 질량 중심에 작용하는 중력, f 는 마찰력, $\omega=\dot{\theta}$ 이고 초기조건은 $r=\eta A(\eta\le 1)$, $\dot{r}=0$, $\theta=0$, $\omega=0$ 이다.



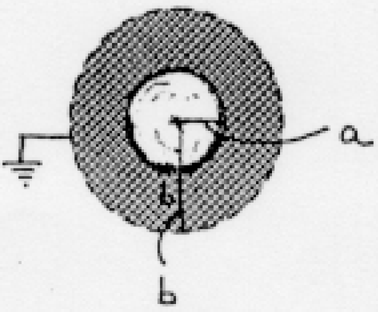
(1) 빵의 운동에너지 $T(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$를 구하여라.

(2) $r(t), \theta(t), N$ 의 운동 방정식을 구하여라.

(3) 제(i)의 운동중에는 $\dot{r}=0$, $r=\eta A$(상수)를 유지함을 알 수 있다. 이때 N 과 f 를 θ 의 함수로 표시하고 θ 의 방정식을 써라.

(4) 제 (ii) 단계의 운동이 시작될 때의 초기 조건들을 최대 정지 마찰 계수 μ_s 및 η 를 써서 나타내어라. 그리고 (ii) 단계의 운동이 어느 조건이 만족되는 순간 (iii)단계 운동으로 바뀌는지 정성적으로 설명하여라. (제 (ii) 단계 운동중에는 $f=\mu_k N$ (μ_k 는 운동마찰계수) 의 관계가 성립한다.)

[전자기: 문제-1] 원점이 일치하고 반경이 a 와 b ($a < b$)인 두 개의 도체구가 있다. $a < r < b$의 공간에 그림과 같이 유전율이 $\varepsilon(r) = \varepsilon_o/(1+Kr)$ (ε_o, K=상수) 인 유전체가 차여있다. 만일 안쪽 구 표면에 전하 Q 가 있고 바깥 구 표면은 접지 (ground) 되었다고 하자.



(1) $a < r < b$ 에서의 Capacitance를 구하라.

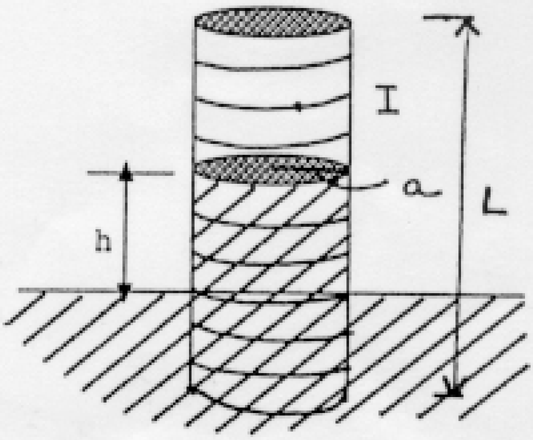
(2) $a < r < b$ 에서의 Polarization Charge Density를 구하여라

(3) $r = a$ 와 $r = b$ 에서의 표면 Polarization Charge Density 를 구하여라.

(참조: 구좌표계 Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}F_\phi$$ 이다.)

[전자기: 문제-2] 그림과 같이 반경 a, 길이 L, N 회 감긴 solenoid 에 일정한 전류 I 가 흐르고 있다.



(1) 이 솔레노이드 내부에서의 자기장이 균일함을 보이고 그 크기를 구하라. (Edge 효과는 무시한다.)

(2) 자기 감수율 (Magnetic Susceptibility) $\chi_m > 0$ 인 상자성 유체가 솔레노이드 내부에 h 만큼 올라왔다면 이 높이 h 를 문제에서 주어진 다른 물리량들로 표시하라. (단 Edge 효과와 모세관 현상은 무시하고 상자성 액체의 밀도를 ρ, 중력가속도를 g 라고 하여라).

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

$B = (1+4\pi\chi)$

$\vec{M} = \chi H$

[전자기: 문제-3] z-축에 평행한 전기 쌍극자 모멘트 (electric dipole moment)가 시간에 따라 단진동하고 있다. 이를 구좌표계 (Spherical Coordinates)에서 나타내면

$\vec{P}(\theta, t) = \vec{P}_o Re[\exp(i\omega t)]$; $\quad \vec{P}_o = P_o \hat{z} = P_o(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$

로 주어지고 이 때 진동하는 쌍극자 모멘트에 의한 전기장과 자기장은 Radiation Zone ($kr \gg 1$) 에서 다음과 같이 표시된다.

$$\vec{E} = Re[-\frac{k^2 P_o}{4\pi\varepsilon_o r}\sin\theta \quad \exp(ikr - i\omega t)]\hat{\theta}$$

$$\vec{B} = Re[-\frac{\mu_o k\omega P_o}{4\pi r}\sin\theta \quad \exp(ikr - i\omega t)]\hat{\phi}$$

(1) 진동 주기 T 에 대하여 평균한 Average Radiation Power $\langle P \rangle_T$ 를 구하여라 (참고: $\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \frac{4}{3}$)

(2) 변위 $\vec{\ell}$ 이 일정하고 전하 Q 가 시간에 따라 진동하는 Oscillating Dipole 은 $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\ell) = I\ell = Re[\,I_o\exp(i\omega t)]\ell$ 이 된다. (i)의 결과와 이 관계식을 이용하여 Radiation Resistance R 을 구하여라. (Radiation Resistance R 은 $\langle P \rangle_T = \frac{1}{2}RI_o^2$ 으로 정의되는 양이다.)