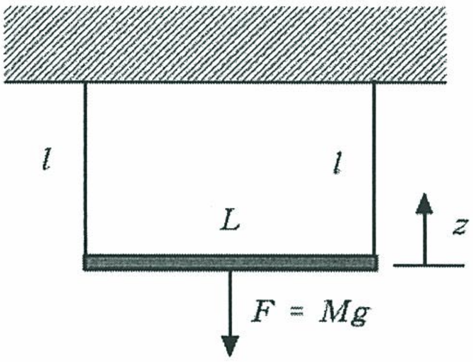
소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 역학 **2004. 01. 17 시행**

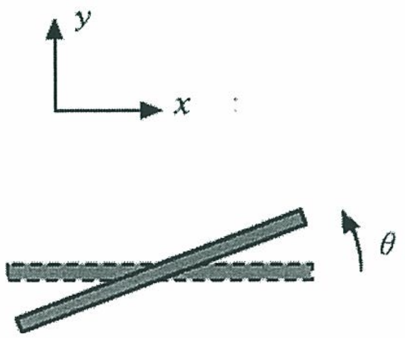
1. 아래 그림 A 와 같이 길이가 L 이고, 질량이 M 인 가늘고 고른 막대의 양끝에 질량을 무시할 수 있는 길이 l 의 줄을 연결하여 천장에 매달아 놓았다. 평형 상태에서의 막대의 높이를 $z=0$, 중력가속도를 g 라 하고, 다음 물음에 답하라.



(그림 A. 옆에서 본 그림)

가) 막대를 막대축의 방향으로 살짝 움직였다 놓을 때 일어나는 잔 떨기(미소진동, small oscillation)의 주기를 구하라.

이제 아래그림 B에서처럼 막대의 가운데를 중심으로 하여 수평면(xy 평면)상에서 각도 θ 만큼 돌렸다가 놓는 경우를 생각하기로 한다.



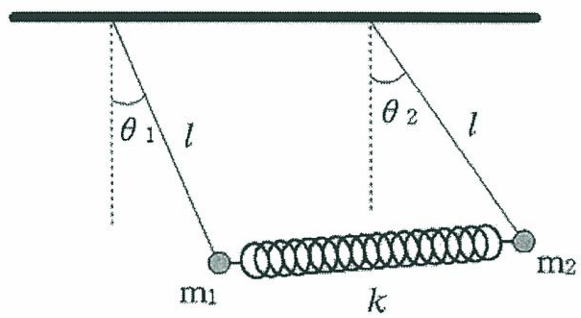
(그림 B. 위에서 본 그림)

나) 각도 θ 만큼 막대가 돌아갔을 때의 막대의 높이 z 를 각도 θ 의 함수로 표시하라.

다) 각도 θ 만큼 돌린 막대를 놓는 순간에 한쪽 줄에 걸리는 장력 T 를 각도 θ 의 함수로 표시하라.

라) 각도 θ 가 매우 작을 때, 막대의 운동은 흩어울림 운동(단진동, simple oscillation)임을 보이고, 진동 주기를 구하라.

2. 그림과 같이 질량이 m_1 과 m_2 인 두 질점이 길이가 l 인 막대에 매달려 있고, 질점은 용수철상수가 k 인 용수철에 의해서 연결되어 있다. 용수철의 자연상태 길이는 두 막대를 천장에 매달은 곳 사이의 거리와 같다. 막대와 용수철의 질량은 무시하고, 두 질점의 운동은 수직면상에 국한되며, 중력가속도는 g 라고 하고 다음 물음에 답하라.



가) 계의 라그랑지안(Lagrangian)을 적어라.

나) 라그랑지의 운동방정식을 구하라.

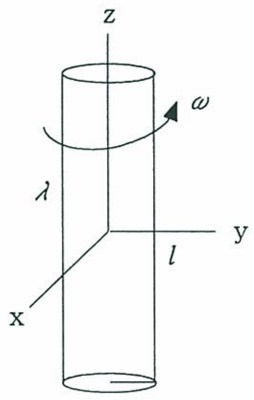
다) $\theta_1, \theta_2 << 1$ radian 인 잔 떨기(미소진동)의 기준방식(normal mode)을 그림으로 나타내고, 떨기수(진동수)를 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 전자기학 **2004. 01. 17 시행**

1. 그림과 같이 길이가 l, 반지름이 R ($R << l$)인 긴 튜브(원통형 관)가 $\hat{z}$-축 방향을 축으로 하고, 그 중심이 (0, 0, 0) 에 놓여있다. 이 튜브의 바깥쪽 표면에는 단위 길이 당 λ 의 전하가 균일하게 분포하고 있으며, 튜브는 $\hat{z}$-축을 중심으로 각속도 ω 로 회전하고 있다. 끝머리(edge)효과는 무시하고 다음 물음에 답하라.



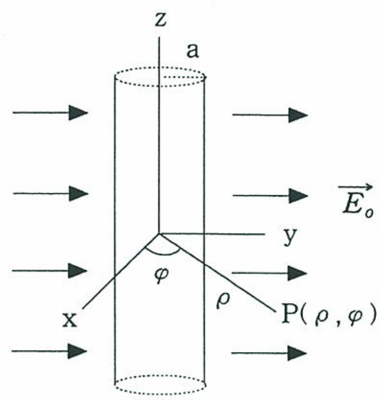
가) 모든 공간에서 전기마당(전기장)의 크기를 구하라.
나) 튜브 내부에서 자기마당(자기장)의 크기를 구하라.

이제 자기쌍극자모멘트 $\vec{\mu}(=\mu_H\hat{x})$ 로 편극된 수소원자가 튜브의 중심 축을 따라 $\vec{v}(=v\hat{z})$ 의 속도로 입사되었다.

다) 이 수소원자가 받는 힘과 돌림힘(토크, torque)의 크기를 각각 구하라.
라) 이 수소원자의 자기쌍극자는 Larmor 옆돌기(세차, precession) 운동을 하게 되는데, 이 세차운동의 주기를 구하라.

[힌트: 원자의 각운동량 $\vec{L}$ 은 자기쌍극자모멘트와 $\vec{\mu}=g\dfrac{e}{2mc}\vec{L}$ 의 관계가 있고, 여기서 g 는 란데 지인자(Lande g-factor)이다.]

2. 균일한 전기마당(전기장) $\vec{E_0}=E_0\hat{y}$ 안에 반지름이 a 이고, 길이가 매우 길며 속이 찬 원통형 도체를 $\vec{E_0}$ 방향과 수직으로 놓았다.



가) 도체가 접지(grounded)되어 있을 때, 도체 바깥의 점 P 에서의 전기퍼텐셜이

$$\Phi(\rho,\phi)=-E_0(\rho-\frac{a^2}{\rho})\sin\phi$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 (ρ,ϕ)는 그림과 같이 좌표축을 도입하였을 때의 원통좌표이다.
나) 원통에 단위 길이 당 유도된 전하분포를 구하라.
다) 원통 단위 길이 당의 전기쌍극자모멘트를 구하라.
라) 이 도체가 접지되지 않고 단위 길이 당 λ 의 전하분포를 가질 때, 원통의 바깥과 안에서의 전기퍼텐셜을 모두 구하라.
마) 이 경우 원통의 단위 길이 당 전기쌍극자모멘트는 얼마인가?

[힌트: 원통 좌표계에서는

$$\nabla^2\Psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

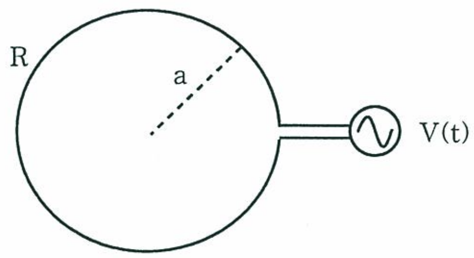
로 주어진다.]

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 전자기학(계속) **2004. 01. 17 시행**

3. 반지름이 a 이고 전기저항이 R 인 원형 도선이 교류 전압 $V(t) = V_0 \cos \omega t$ 에 의해 구동되고 있다.



가) 원형 도선 회로에 흐르는 전류를 주파수의 함수로 구하고, 저항에 의해서 단위시간 동안 열로 손실되는 에너지의 시간에 대한 평균값을 구하라.

나) 원점 부근에서 각떨기수 ω 로 어울떨기(조화진동, harmonic oscillation)을 하는 자기모멘트 $\vec{m}$ 에 의한 벡터 퍼텐셜 $\vec{A}(\vec{r}, t)$ 는 자기모멘트로부터 멀리 떨어진 위치 $\vec{r}$ ($r \gg c/\omega$) 에서 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = ik\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\vec{r} \times \vec{\mathrm{m}} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r^2}$$

여기서 $k = \dfrac{\omega}{c}$ 이고 SI 단위계를 사용하고 있다. 이로부터 아주 멀리 떨어진 위치 $\vec{r}$ 에서의 내비침 전기마당(방사전기장, radiation field) $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 와 내비침 자기마당(방사자기장) $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 를 각각 계산하라.

다) 이 자기모멘트가 단위 시간 당 내비치는 에너지 P_{rad} 를 포인팅 벡터(Poynting vector) $\vec{S}(= \vec{E} \times \vec{H})$ 의 시간 평균으로부터 계산하라.

라) 위의 원형 도선에서 자기모멘트에 의해 내비치는 에너지 손실을 교류전압의 각떨기수 ω 의 함수로 구하라. 또, 어떤 조건을 만족하면 내비침에 의한 에너지 손실을 무시할 수 있겠는가? (단, $R \sim \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 라고 가정한다.)

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 양자역학 **2004. 01. 17 시행**

1. 다음은 두개의 동일 입자로 이루어진 계의 양자 상태에 관한 질문이다.

(가) 한 입자가 취할 수 있는 양자상태들이 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자의 가능한 모든 스핀상태를 나타낸다면, 이 경우 두개의 동일 입자로 이루어진 계에서 particle exchange 에 대해서 대칭(symmetric)인 상태들로만 구성된 상태 공간 V_S 에 속한 양자 상태들에 대해서 $\vec{J}^2$ (여기서 $\vec{J}$ 는 두 입자 계의 total 스핀 각운동량 연산자임.)의 고유값을 구하라. 또한 particle exchange 에 대해서 반대칭(antisymmetric)인 상태들로만 구성된 상태공간 V_A 에 속한 양자 상태들에 대해서 $\vec{J}^2$ 의 고유값을 구하라.

(나) 이제 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자대신 스핀 1 인 입자가 두개 있는 경우에 상태공간 V_S 와 V_A 에 속한 양자상태들에 대해 $\vec{J}^2$ 의 고유값을 각각 구하라.

(다) 이번에는 한 입자가 n 개의 다른 양자상태를 취할 수 있다고 하자. 입자가 두개 있는 경우에 상태공간 V_S 의 차원 d_S (즉 서로 독립적인 basis의 개수) 및 상태공간 V_A 의 차원 d_A 를 각각 구하라.

2. x 축에 평행한 외부 전기마당(전기장) $\vec{E_0} = E_0 \hat{x}$ 내에 놓여 있는 극성 두 원자 분자(polar diatomic molecule) 의 반응을 이해하기 위해, 극성 두 원자 분자를 전기 쌍극자 모멘트

$$\vec{p} = p_0 \hat{r} = p_0 [\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}],$$

회전관성(관성모멘트) I 의 강체(rigid rotor)로 가정하자. 문제를 단순화하기 위해 이 강체의 질량중심의 운동은 무시하고 항상 원점에 위치해 있으며, 강체의 회전축은 항상 $\hat{z}$-축을 향한다고 가정하면, 이 계의 Hamiltonian 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \frac{p_\theta^2}{2I} \quad \left(단,\ p_\theta = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

$$H_1 = -\vec{p}\cdot\vec{E_0} = -p_0 E_0 \cos\theta$$

(가) 외부 전기장의 크기 $E_0 = 0$ 일 때, 이 양자계의 에너지 고유값 $\varepsilon_m^{(0)}$ 들을 구하고, 그에 대한 고유함수 $\phi_m^{(0)}$ 들을 구하라.

(나) 외부 전기장의 크기가 작을 때, 바닥상태 에너지의 변화량 $\Delta\varepsilon_0$ 을 $(p_0 E_0)$ 의 제곱 항까지 구하라.

(다) 쌍극자 연산자 $\vec{p} = p_0 \hat{r}$ 의 기대치 $\langle \vec{p} \rangle$ 에서 두 분자의 전기감수율(electric susceptibility) χ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\langle \vec{p} \rangle = \chi \vec{E}$$

(나)문항의 결과를 이용하여 전기감수율 χ 를 구하라.

(라) 위에서 다룬 건드림이론은 전기장의 크기가 매우 강한 경우에 적용하기 어렵다. 만일 전기장의 크기가 $p_0 E_0 \gg \frac{\hbar^2}{2I}$ 인 경우에는 바닥상태가 $\theta \approx 0$ 에 국한될 것으로 예상할 수 있고, 그에 대해 Hamiltonian 을 다음과 같이 근사해서 쓸 수 있다.

$$H \approx \frac{p_\theta^2}{2I} - p_0 E_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

이 양자계가 다음과 같은 불확실성

$$\Delta p_\theta \cdot \Delta\theta \approx \hbar$$

를 만족한다고 가정하여 에너지의 최소값을 구하고, 그러한 바닥상태에 대해 쌍극자 연산자 $\vec{p} = p_0 \hat{r}$ 의 기대치 $\langle \vec{p} \rangle$ 의 크기를 외부 전기장의 크기 E_0 의 함수로 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 양자역학(계속) **2004. 01. 17 시행**

3. 세 에너지 준위($0 < \omega_1 < \omega_2$)를 가진 전자에 약한 건드림(perturbation)이 주어져 전체 Hamiltonian 이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$H = H_0 + H'$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & A(t) & B(t) \\ A(t) & 0 & 0 \\ B(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

여기서, $A(t) = \Delta_1 \exp(-\frac{t^2}{\tau^2})\cos(\omega t)$ 이고

$B(t) = \Delta_2 \exp(-\frac{t^2}{\tau^2})\cos(\omega t)$ 이다.

이러한 Hamiltonian 은 세 에너지 준위를 가진 계에 일정 시간동안 빛을 쏘여 주어서 준위 사이에 전이를 일으키는 상황을 근사한다. 다음 물음에 답하라.

(가) 섭동 Hamiltonian H' 의 모양만을 보고 1차 섭동(1st order in perturbation)에서 어떤 준위 사이에서 전이가 가능한지 기술하라.

(나) 슈뢰딩거 방정식을 $\psi = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$ 에 대하여 적어라.

(각각의 계수 a_o, a_1, a_2 에 대해 구체적으로 적어라.)

(다) $t = -\infty$ 때 이 계는 바닥상태 즉,

$$\psi(t=-\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

에 있었다. 섭동이 약한 경우에는 바닥상태에 있을 확률이 들뜬 상태에 있을 확률보다 항상 훨씬 더 크다. 이러한 조건 하에서 $a_1(t)$ 와 $a_2(t)$ 에 대한 슈뢰딩거 방정식을 근사적으로 풀어라. (바닥상태에 있을 확률이 매우 크므로, $a_o(t) \approx 1$ 로 근사할 수 있다.) 시간이 한참 지난 후($t \to \infty$)에, $\omega, \omega_1, \omega_2 \gg \frac{1}{\tau}$ 인 조건 하에서 전자가 들뜬 상태들, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 와 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 상태에서 발견될 확률을 각각 구하라.

[힌트: $\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ 이고

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} dt = \tau\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\tau^2 a^2}{4}} \quad]$$

4. 질량 M 인 뮤온(μ) 입자가 입사하여 양성자(p)와 질량 m 인 전자(e)로 이루어진 수소원자와 충돌하여 전자를 방출하고, 뮤온과 양성자로 이루어진 원자를 형성하는 비탄성충돌(inelastic scattering)

$$\mu + Atom(p+e) \to e + Atom(p+\mu)$$

을 고려하자. 문제를 단순화하기 위하여 양성자의 질량을 ∞ 라고 한다. 또한 충돌전의 뮤온과 atom ($p+e$) 사이의 전자기 상호작용과 충돌후의 전자와 atom($p+\mu$) 사이의 전자기 상호 작용을 무시한다. 전이를 일으키는 Hamiltonian은 다음과 같다.

$$H' = \lambda\sigma_1^{(\mu)}\frac{1}{2}(1+\sigma_3^{(e)})$$

여기서, $\sigma_1^{(\mu)}$ 는 뮤온의 Pauli matrix 이고 $\sigma_3^{(e)}$ 는 전자의 Pauli matrix 이다. 다음의 질문을 Fermi Golden Rule 을 사용하여 풀어라.

(가) 뮤온의 입사 운동량은 $\hbar k$ 이고 수소원자($p+e$)은 바닥상태에 있고 충돌 후 생성된 atom($p+\mu$)이 바닥상태에 있을 때, 방출된 전자의 운동량(momentum)을 구하라.

(나) 또한 입사된 뮤온의 스핀이 $\sigma_3^{(\mu)}$ 에 대해서 $|\uparrow\rangle$ 상태일 경우 충돌 후 뮤온의 스핀을 구하라.

(다) 충돌전 전자의 스핀의 함수로 differential scattering cross section $\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}$ 을 구하라. (답을 아래 주어진 $F(Q,a)$ 를 사용하여 쓰시오).

[힌트: u_0 을 수소원자의 바닥상태 파동함수라고 하면,

$F(Q,a) = \int d^3x\, e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} u_0(\vec{r})$. ($a =$ Bohr radius)]

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험 문제지

과목명 : 통계역학 **2004. 01. 17 시행**

1. 고전역학에서, s 차원 공간의 한 입자의 해밀토니안 (Hamiltonian) $H(p,q)$ 는 바른틀 자리표(정준 좌표, canonical coordinates) $q=(q_1,\ldots,q_s)$ 와 바른틀 운동량(정준 운동량, canonical momenta) $p=(p_1,\ldots,p_s)$ 로 표시될 수 있다. 이 시스템이 주위의 온도 $T=1/k\beta$ 와 열적인 평형을 이룰 때, 한 입자의 바른틀 분배함수(정준 분배함수, canonical single particle partition function) 는

$$z=\int\int \exp(-\beta H)\, dq\, dp/h^s$$

이다. 여기서 h 는 플랑크의 상수(Planck's constant) 이다. 다음 물음에 답하라.

가) 서로 상호작용이 없는, N 개의 입자들로 구성된 시스템의 전체 분배함수(total partition function) Z_T 를 z 와 N 을 써서 표시하라.

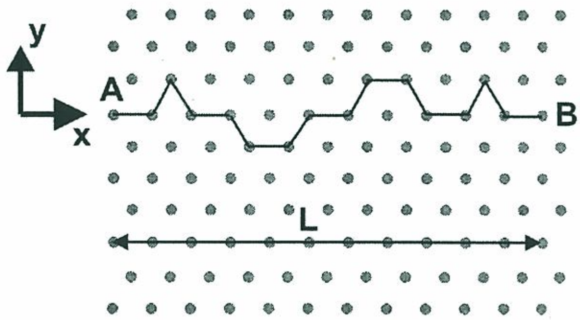
나) 부피가 V 인 3 차원 상자 안에 있는 한 입자의 병진(translational) 운동에너지 $H_t=P^2/(2M)$ 에 해당하는 z 를 구하라. M 은 입자의 질량이고, $\vec{P}$ 는 입자의 질량중심의 운동량 벡터이다.

다) 만일, 이 입자가 관성모멘트 I 를 갖는 두 원자 분자(diatomic molecule)라면, 입자의 회전 운동 에너지는 $H_r=(P_\theta^2+P_\phi^2/\sin^2\theta)/(2I)$ 이다. 이 회전 자유도에 해당하는 z 를 구하라.

[힌트: 관련된 위상공간(phase space)은 $0<\theta<\pi$, $0<\phi<2\pi$, $-\infty<P_\theta, P_\phi<+\infty$ 이다.]

라) 두 원자 분자로 구성된 이상기체 1 mole 의 일정 부피 견줌열(정적비열) C_V 를 나), 다) 문항의 결과를 바탕으로 구하라. 분자들의 떨기(진동) 자유도는 무시한다.

2. 아래 그림과 같이 2 차원 삼각격자에서, x 축 상에 있고 거리가 L 만큼 떨어진 두개의 점 A, B 에 줄이 고정되어 있다. 줄은 삼각격자점을 따라 이어져 있고 튀어나옴(overhang)은 허락하지 않는다고 가정한다. 즉, 어느 x 에 대하여 줄의 위치를 나타내는 y(x) 는 하나의 값만을 갖는다. 이 줄이 두개의 상(예를 들어 액체와 기체)의 경계면을 나타낸다고 가정하고, 이 경계면이 갖는 에너지는 줄의 총 길이에 비례한다고 한다. (비례상수 $\epsilon=1$ 로 놓는다.) 또, 편의상 단위 격자의 길이를 1 이라고 하고, 두 점 A, B 를 잇는 직선이 경계면일 때의 에너지를 0 이라고 한다.



가) 수평으로 이어진 경계면의 수를 N_0, +x 방향으로 가면서 올라가는(uphill) 경계면의 수를 N_+, 내려가는(downhill) 경계면의 수를 N_- 라고 하자. N_+ 와 N_- 를 N_0 와 L 로 표시하라.

나) 임의의 N_0, N_+, N_- 를 갖는 경계면이 있을 때 에너지 E 를 N_0 와 L 로 표시하라.

다) 이 경계면이 갖는 엔트로피를 L 과 E 의 함수로 구하라.

라) 열역학 관계식을 이용하여 온도 T 가 주어졌을 때, 경계면의 열역학적 평균 길이를 구하라.

[힌트: 매우 큰 수 N 의 경우 $\ln N! \simeq N\ln N-N$]