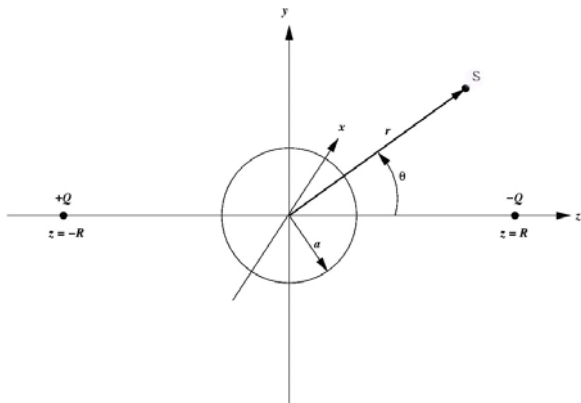


물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학

2006 . 01. 20 시행

1. (45점) 그림과 같은 원점에 놓인 반지름 a 인 도체구를 생각하자.



- (가) 균일한 전기장 $\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$ 를 가하고자 한다. 균일한 전기장은 적절한 크기의 $\pm$ 전하가 무한대에 위치하여 생긴다고 생각할 수 있다. 즉 그림에서처럼 $\pm Q$ 를 $z = \mp R$ 에 놓아보자. 원점 부근에서는 근사적으로 균일한 전기장 $\vec{E}_0 \approx \frac{2Q}{4\pi\epsilon R^2} \hat{z}$ 이 z 축과 평행하게 생긴다. 만약 Q/R^2 을 일정하게 유지하면서 R & $Q \rightarrow \infty$ 로 가는 극한에서는 위의 근사값과 정확하게 일치한다. 여기서 image 방법으로 도체구 바깥쪽의 전기장을 구하고자 하는데 $\mp R$ 에 위치한 두 개의 전하 $\pm Q$ 때문에 생기는 image 전하의 위치와 크기를 구하라.

- (나) 외부 전기장 $\vec{E}_0$ 때문에 생기는 도체구의 dipole moment는 $\vec{p} = 4\pi\epsilon a^3 \vec{E}_0$ 임을 보여라.

- (다) 외부 전기장을 가하면 도체 표면에 표면전하밀도 $\sigma(\theta, \phi)$ 가 유도된다. 표면전하밀도가 변하지 않도록 고정시킨 후 외부 전기장 $\vec{E}_0$ 를 제거시킬 경우, 표면전하밀도 $\sigma(\theta, \phi)$ 때문에 생기는 전기장을 구하라.

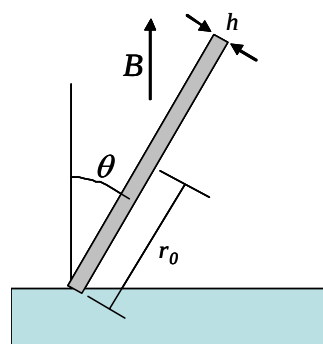
- (라) 도체구에 y 방향으로 편극되고 z 방향으로 진행하는 평면 전자기파를 가할 때 입사되는 전기장은 $\vec{E}_{inc} = \hat{y} E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ 로 나타낼 수 있으며 여기서 $k = \omega/c$ 이다 ($k \ll \frac{2\pi}{a}$). 입사하는 전기장은 구에 dipole moment $\vec{p}$ 를 유도하며 이 oscillating dipole 은 electric field radiation

$$\vec{E}_{sc} = \frac{1}{4\pi\epsilon} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n}]$$

을 방출한다. 여기서 $\hat{n}$ 과 r 은 각각 원점에서 측정자 S의 방향을 나타내는 단위 벡터 및 거리를 나타낸다. 만약 측정자 S가 yz 평면에서 z 축과 θ 의 각도를 이룰 때, 측정되는 파의 세기 (intensity) 가 θ 에 어떻게 의존하는지 구하라. (앞의 경우와는 달리 여기서는 전기장의 편극방향이 y 방향임에 유의하라.)

- (마) 측정자 S는 (라)와 동일하나 전기장의 편극 방향이 y 가 아니고 x 일때, 측정되는 파의 세기의 θ 의 존도를 구하라.

2. (30점) 그림에서 보는 바와 같이 균일한 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 가 가해진 마루표면에 구리로 만든 얇은 원판형의 동전 (반지름 r_0 두께 h) 이 표면의 수직선과 θ_0 각도로 서있다. $\theta = \theta_0$ 에서 살짝 밀어서 동전이 천천히 넘어짐이 관찰되었다. 구리 동전의 밀도는 ρ , 전기전도도는 σ 라고 하자. 단, 동전과 마루표면의 접촉점은 변하지 않는다고 한다.



물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학

2006 . 01. 20 시행

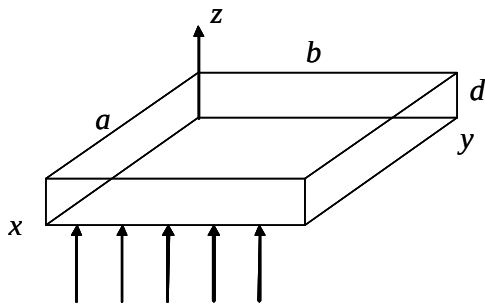
(가) 먼저 동전 내부의 반지름 r 과 $r + dr$ 사이의 얇은 원통형 ring 을 생각하자. 동전이 넘어질 때 임의 각도 θ 에서 이 ring에 유도되는 미소전류 di 를 구하라. 그리고, 이 미소전류가 만드는 magnetic dipole moment로 인해 이 ring이 받는 미소 torque $d\tau_m$ 을 구하라.

(나) 임의의 각도 θ 에서 동전 전체가 받게 되는 torque τ_m 를 구하라.

(다) 이 동전의 접촉점에 대한 회전관성 (rotational inertia)을 I 라고 할때, 이 동전이 넘어지는 동안 성립하는 운동 방정식을 세워라.

그리고 이 방정식으로부터 동전이 넘어지는 과정에서 동전의 역학적 에너지가 어떻게 쓰였는지 간단히 설명하라.

3. (45점) x 변의 길이가 a , y 변의 길이 b , 그리고 z 축 방향의 두께가 d 이며 전도도가 σ 인 얇은 금속판에 각진동수 ω 인 전자기파가 z 축 방향으로 수직하게 입사하는 경우를 생각하자.



이 경우 전자기파의 각 성분은 파동방정식

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

에서 구할 수가 있다.

(가) 위의 식으로부터 파수 벡터 (wavevector) k 가 만족시켜야 하는 분산관계를 구하라. 그리고, $k = \alpha + i\beta$ 로 표현할 때 α 및 β 를 구하라. 만약 전도성이 아주 크다면 ($\sigma \gg \omega\epsilon$) 이 때 α 및 β 는 어떤 근사 형태를 가지게 되는가?

(나) (가)의 결과를 이용하여 $\vec{E}(z,t)$ 및 $\vec{H}(z,t) = \frac{\vec{B}(z,t)}{\mu}$ 를 구하라.

(다) 이 때 도체 내부에서 Poynting vector의 시간 평균 $\langle \vec{S}(z) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ 을 구하라.

(라) 전자기파가 두께 d 인 금속판을 통과하는 동안 일을 손실 (power loss)을 (다)의 결과를 이용하여 구하라.

(마) 만약 $d \ll \delta = \left(\frac{2}{\omega\sigma\mu}\right)^{1/2}$ 일 때, 이 금속판에서 전자기파에 의한 줄열손실 (Joule heating loss)를 구하고 (라)의 결과와 비교하라.

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학

2006 . 01. 20 시행

1. (30점) 각운동량 연산자 J_i ($i = x, y, z$ or $1, 2, 3$) 가 다음과 같은 맞바꿈관계 (commutation relation) $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$ 을 만족한다.

이제 $|j, m\rangle$ 를 $\vec{J}^2$ 과 J_z 의 고유함수이고, 각각의 고유치는 $j(j+1)\hbar, m\hbar$ 라고 하자.

(가) 올림 및 내림 연산자 (raising or lowering operator) $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ 가 $\vec{J}^2$ 와 서로 맞바꿈 (commute) 됨을 보여라.

(나) $J_{\pm}|j, m\rangle = c_{jm}|j, m \pm 1\rangle$ 임을 증명하라. (단, c_{jm} 은 상수)

(다) 위의 (나)에서 c_{jm} 를 구하라. (단, 위상 차이는 무시한다)

(라) $|j, m\rangle$ 에서 $m = l - \frac{1}{2}$ 이라고 하자.
이 경우에 $|j, m\rangle$ 을 $s = \frac{1}{2}$ 인 고유함수들 $|l, m_l; s = \frac{1}{2}, m_s\rangle$ 로 표현하라.
(단, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 이다)

2. (45점) 결정 고체에서 두 살창점 (lattice site, $k = 1, 2$)에 존재하는 두 개의 동일한 전자 ($i = 1, 2$) 사이의 상호작용이 다음과 같은 유효 해밀토니안으로 묘사된다고 하자.

$$\hat{H} = -J(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}) \quad (J \text{ 는 양의 상수})$$

이때, $\sigma^{(i)}$ 는 i 번째 전자의 스핀을 나타내는 파울리 행렬이다. 아래의 문제에서 $\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)} = \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} - \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$ 임을 이용하라.

(가) 이 계의 에너지 고유값과 각 준위의 겹침 (degeneracy) 수를 구하라. 여기서 전체 스핀을 $\vec{S} (= \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma})$ 로 표시하기로 한다.

(나) 전자가 살창점 (lattice site) k 에 존재할 때의 공간 상태 함수를 $\phi_k(\vec{r}_i)$ ($i, k = 1, 2$) 로, i 번째 전자의 스핀상태 함수를 $|\uparrow\rangle_i, |\downarrow\rangle_i$ ($i = 1, 2$) 로 표시하자. (가)의 에너지 준위에 따른 가능한 고유함수의 형태를 스핀과 공간 함수를 함께 고려하여 표현하라.

(다) 이제 외부 자기장이 z 방향으로 일정하게 주어질 때 ($\vec{B} = B\hat{z}$), 이 계의 해밀토니안을 써라. (단, 전자 스핀의 g 인자는 2로 하라)

(라) (다)의 해밀토니안의 에너지 준위를 구하고 자기장에 의해 바닥상태가 바뀌는 최소 자기장 값을 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학

2006 . 01. 20 시행

3. (45점) BCS 이론에 의하면, 초전도 현상은 개수 (number)와 위상 (phase) 으로 묘사되는 쿠퍼쌍의 응축에 의해 얻어진다. 이제 두 개의 초전도 물질 낱알이 가까이 붙어 조셉슨 접합을 이루면, 조셉슨 터널 에너지 $-J\cos\phi$ (단, ϕ 는 두 낱알의 위상차이)를 만들어, 이 계의 해밀토니안은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = \frac{q^2}{2C} - J\cos\phi$$

위에서 q 는 낱알 하나의 전하이고, C 는 두 낱알 사이의 전기들이 (capacitance) 이다. 만일 외부 전류나 전압이 걸려있지 않으면, $q = 2en$ (단, n 은 한 낱알에 있는 쿠퍼쌍의 개수)의 관계를 만족한다. 양자역학적으로 위상 ϕ 와 쿠퍼쌍의 개수 n 은 켈레변수 (conjugate variable)로 취급될 수 있으므로, $[\phi, n] = i$ 의 관계를 만족하고 있다.

(가) 이 계의 슈뢰딩거 방정식을 적고, 이 때 나타나는 파동함수 $\Psi(\phi)$ 의 물리적 의미를 설명하라. (힌트: n 은 ϕ 에 대한 미분 연산자로 표현할 수 있음을 이용하라.)

(나) $J=0$ 이라고 가정하고, 에너지 고유값 및 고유함수를 구하라. 이 때 $\Psi(\phi)$ 가 만족하여야 할 경계조건은 무엇인가?

(다) 이제 조셉슨 터널 에너지항을 섭동에너지라고 취급하자. 섭동으로 인한 에너지 고유값의 변화가 0이 아닌 가장 낮은 차수의 섭동항만 고려하여 에너지 고유값을 구하라.

(라) 조셉슨 결합이 충분히 강하면 위상차이 ϕ 의 변화가 매우 작으므로 계는 작은 진동 (small oscillation)을 하게 된다. 이 경우에 에너지 고유값을 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 고전역학

2006 . 01. 20 시행

1. (30점) 2차원 평면에서 주어진 질량 m인 입자가 $V=Gr$ (G는 양의상수)의 포텐셜에서 운동을 한다. 여기서 r은 원점으로부터의 거리이다. (가) 이 물리계의 라그랑지안과 해밀토니안을 각각 구하라. 단, 극좌표계 (r,θ)를 쓰고, r과 θ에 대한 운동량을 P_r과 P_θ로 표시할 것. (나) 해밀톤 운동 방정식을 써라. 그리고, $P_\theta=l$로 일정하게 주어져서 원운동을 할 경우 원운동 반지름 r_0를 l,m,G의 함수로 구하라. (다) (나)의 원운동에서 l값을 고정시키고, 살짝 건드리어서 r이 r_0부터 조금 벗어나게 만들었다 ($r=r_0+\Delta r$). $\Delta r \ll r_0$일 경우 Δr에 관한 운동 방정식을 Δr의 일차항까지 구하라. (라) 이 운동에서 ω/ω_0를 구하라. 여기서 $\omega_0=\dot{\theta}$는 원운동의 각속도이고, ω는 Δr의 각진동수이다.	2. (30점) 질량 m인 입자가 일차원 x축을 따라 운동한다. 이 입자에는 선형복원력 $-kx$와 작은 세제곱 힘 kx^3/a^2이 작용해서 알짜힘이 다음과 같이 주어진다. $f(x)=-kx+\frac{kx^3}{a^2}.$ 처음에 이 입자는 $x=0$에서 운동에너지 E_0를 지니고 오른쪽으로 움직인다고 하자. $\cos^3\theta=\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos3\theta$ (참고) $\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\theta$ (가) 포텐셜에너지 $V(x)$를 구하고, 그래프로 나타내라. 단, $V(0)=0$으로 한다. 포텐셜의 최대값 V_M과 이때 위치(x_M)를 구하라. (나)E_0의 값에 따라 입자의 운동을 간략히 기술하라. 진동운동을 할 경우 그 진폭 A를 E_0의 함수로 구하여라. (다) 진동운동을 할 경우, $x=A\cos(\omega t)$ 꼴의 풀이를 써서, 작은 세제곱힘의 효과를 고려하여 ω/ω_0를 계산하라. (단, $\omega_0=\sqrt{k/m}$이며, $(A/a)^2\ll 1$으로 놓고, $\cos(3\omega t)$항을 무시하라.) (라) 진동 운동에서 (다)보다 좀더 정확한 풀이로서 $x=A\cos(\omega t)+B\sin(3\omega t)$로 놓았을때 $\frac{B}{A}$의 값을 어림으로 구하라. 단, $\left \frac{B}{A}\right \ll 1$이며, $\frac{A}{a}$의 0이 아닌 가장 낮은 차수항까지 구하라.
---	---

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 통계역학

2006 . 01. 20 시행

1. (30점) 기체분자가 물질 표면에 흡착하는 상황을 다음과 같이 고려하자. 온도 T , 화학포텐셜이 μ 인 기체와 접촉하고 있는 표면에는 N 개의 자리가 있고, 각 자리는 하나의 기체분자를 흡착할 수 있으며 흡착된 분자의 에너지는 흡착되지 않은 상태와 비교해서 $\epsilon (< 0)$ 으로 주어진다.

(가) 이러한 계의 큰바른틀 분배함수 (grand partition function) Q_N 을 구하라.

(나) 큰바른틀 분배함수를 이용해서 흡착율 $\theta \equiv \overline{N}_1/N$ 을 구하라. 여기서 $\overline{N}_1$ 는 표면에 흡착된 분자 수의 평균값이다.

(다) 흡착되는 기체가 이상기체인 경우에 그 화학포텐셜 μ 를 기체의 온도 T 와 압력 p 및 분자의 질량 m 들로 나타내어라.

참고: N 개의 분자들로 이루어지고 부피 V 인 이상기체의 분배함수는 다음과 같이 주어진다.

$$Z_N = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3N/2}$$

(라) 위의 결과를 이용해서 흡착율이 다음과 같이 기체의 압력에 의존함을 보여라.

$$\theta = \frac{p}{p + p_0(T)}$$

여기서 $p_0(T)$ 도 구하라.

2. (30점) 외부와 열 출입이 없는 부피 V_0 , 온도 T 인 강의실에서 한 학생이 N 개의 분자로 이루어진 향기가 담겨진 부피 V 의 작은 병을 가지고 있다. 이제 시각 $t = 0$ 에서 학생은 병을 열고 향기가 자유롭게 팽창해서 강의실을 채운다고 하자. 향기와 공기는 모두 이상기체로 가정하고 중력은 무시하라.

(가) 이러한 과정에서 향기의 엔트로피 S , 내부에너지 E , 압력 p 사이에 $TdS = dE + pdV$ 관계가 성립하는지 논의하라.

(나) 향기의 엔트로피 변화와 강의실의 공기를 포함한 전체 계의 엔트로피 변화를 각각 구하고 그 결과를 향기가 일정한 온도에서 서서히 팽창하는 경우와 비교하라.

(다) 향기의 접근가능상태 (accessible state)의 수는 어떻게 변화하는가? 이를 리우빌 정리 (Liouville theorem)의 관점에서 논의하라.

(라) 향기의 퍼짐상수 (diffusion constant)를 D 라 하고 $V \ll V_0$ 인 경우 향기의 개수밀도를 기술하는 퍼짐방정식 (diffusion equation)을 쓰고 병으로부터 거리 r 인 지점의 개수밀도가 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$n(r, t) \approx Ct^{-3/2}e^{-r^2/4Dt}$$

여기서 상수 C 는 어떻게 결정되는가?