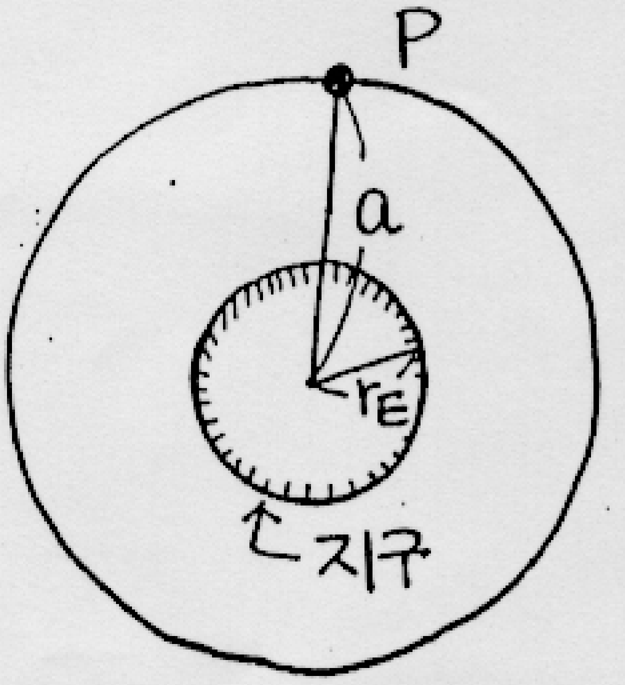
1. 그림과 같이 지구주위를 반경 a인 원궤도를 그리며 도는 인공위성을 생각하자.



(가). 이 인공위성이 적도 상공에 정지하고있는 것처럼 보이는 정지위성이 되기 위해서 이 위성은 지표에서 얼마의 높이에 있어야 하는가? 단 지표에서 중력가속도 $g = 9.8 m/s^2$, 지구반경 $r_E = 6.4 \times 10^6$ m 이다.
(참고 : $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$).

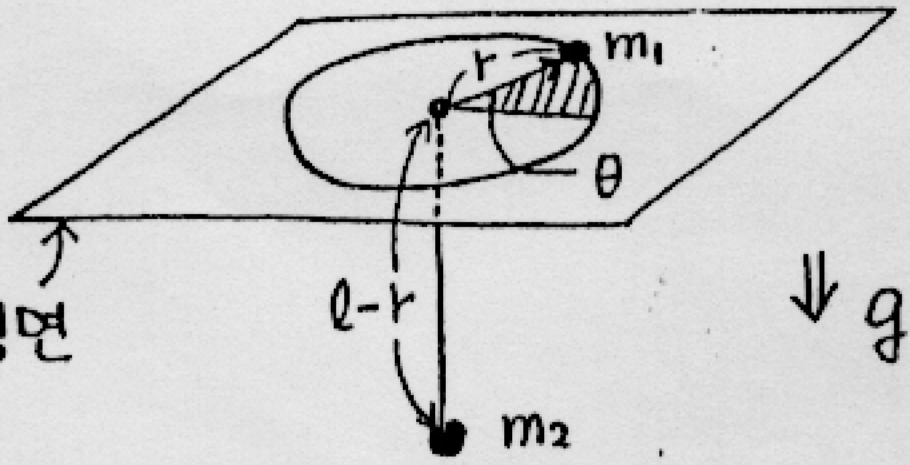
√(나). 원운동할때 인공위성의 총에너지와 반경 a 와의 관계식은 타원운동을 할 경우에도 원의 반경을 타원의 장반경 (semimajor axis)으로 치환하면 그대로 성립한다. (가)에서와 같은 원운동을 하던 인공위성이 궤도상의 임의의 점 P에서 갑자기 접선 방향으로 속도가 1% 증가되었다고하면 이때 인공위성이 그리는 궤도를 대략그리고 그 주기를 계산하라.

√(다). (나) 문제에서 접선 방향의 속도를 얼마 이상 증가 시켜야 지구궤도로 부터 탈출할 수 있는가 ?

√(라). (다)에서와 같은 탈출속도를 얻기위해서 2단 로케트를 분리시키는 방법을 사용하였다. 즉 로케트의 뒷부분 (질량 Δm)을 로케트의 앞부분 (질량 $m-\Delta m$)에 대한 상대속도 6 000 m/s 로 뒷방향을 향해 분리시킴으로써

(다)에서와 같은 탈출속도를 얻을 수 있었다면 분리전 총질량 m과 분리된 부분의 질량 Δm 의 비를 구하라.

2.



그림과 같이 수평면 위에서 마찰없이 운동하는 질량 m_1과 수직방향으로만 운동하는 질량 m_2가 중심의 구멍을 통하여 일정한 길이 l의 끈으로 연결되어 있다 (균일한 중력장 g가 작용하고 있다).

(가). 이계의 Lagrangian을 r과 θ (그림 참조)의 함수로 표시하고 이로부터 운동방정식을 구하라.

(나). 중심으로부터 평면운동중인 m_1을 잇는 위치벡타가 쓸고지나가는 면적속도 ($\frac{dA}{dt}$)는 일정함을 보이라.

(다). r 방향의 운동방정식은 질량 m_1이 $\frac{1}{2}m_1\dot{r}^2$의 운동에너지를 가지며 r의 함수로 주어지는 유효포텐샬 (effective potential) $V_{eff}(r)$ 아래 운동하는 것처럼 생각할 수있다. $V_{eff}(r)$을 구하고 graph로 예시하라.

(라). 이때 질량 m_1이 단순한 원운동을 하기 위해서는 에너지가 어떤 값을 갖는가?

3\. 어떤 전하분포 $\rho(\vec{r})$에 의해 주어지는 정전포텐셜이 SI 단위계에서

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

와 같다고 하자. (여기서 $r = |\vec{r}|$, λ는 양수).

(가). 이때 전장 $\vec{E}(\vec{r})$는? $-\frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\lambda}{r}\right)$

(나). 이 전장을 주는 전하분포 $\rho(\vec{r})$을 구하고 점전하인 경우와의 차이를 말하라. $\epsilon_0 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r^2} \cdot e^{-\lambda r}$

(다). 이 전장내에 전기쌍극자 (electric dipole) $\vec{p}$가 점 $\vec{y}$에 놓여졌다고 할때 이 쌍극자가 받는 힘을 구하라. (여기서 $|\vec{y}| \ll \frac{1}{\lambda}$ 임을 가정하라)

임의의 점.

원점 가까이 있는 임의의 점

4\. 균일한 외부 자기장 $\vec{B}_0$ 안에 속이 찬 무한히 긴 원통형 물체 (반경 a, 투자율 μ)가 놓여있다. 그리고 원통의 축은 $\vec{B}_0$의 방향과 수직이다. 다음 물음에 답하라 (힌트 참조).

(가). 자유전류가 없는 경우 $\nabla \times \vec{H} = 0$ 이다. 따라서 $\vec{H}$ field를 $\vec{H} = -\nabla\phi$ (ϕ: magnetic scalar potential)로 쓸 수 있다. 이 경우 원통의 경계면에서 ϕ가 만족하는 경계조건을 구하라.

$\mu \frac{\partial\phi_{in}}{\partial r}\Big|_{r=a} = \mu_0 \frac{\partial\phi_{out}}{\partial r}\Big|_{r=a}$

(나). $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 으로 부터 ϕ는 원통 안과 바깥에서 Laplace 방정식을 만족한다. 앞에서 구한 경계조건을 이용하여 원통 안과 바깥에서의 ϕ를 구하라.

$\phi_{in} = A_0 - \frac{2B_0 x}{\mu+\mu_0}$

$\phi_{out} = A_0 + \frac{a^2 B_0}{\mu_0} \frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0} \frac{\cos\theta}{r}$

(다). 이 ϕ로 부터 원통 안에서의 자기장이 $\vec{B}_{in} = \frac{2\mu}{\mu_0+\mu} \vec{B}_0$ 가 됨을 보여라 (μ_0는 진공의 투자율임).

O.K.

(라). 초전도체는 perfect diamagnet ($\mu = 0$) 이다. 이때 $\vec{B}$ field와 $\vec{H}$ field가 원통 안과 바깥에서 가지는 field line을 각각 그림으로 나타내라.

(힌트)

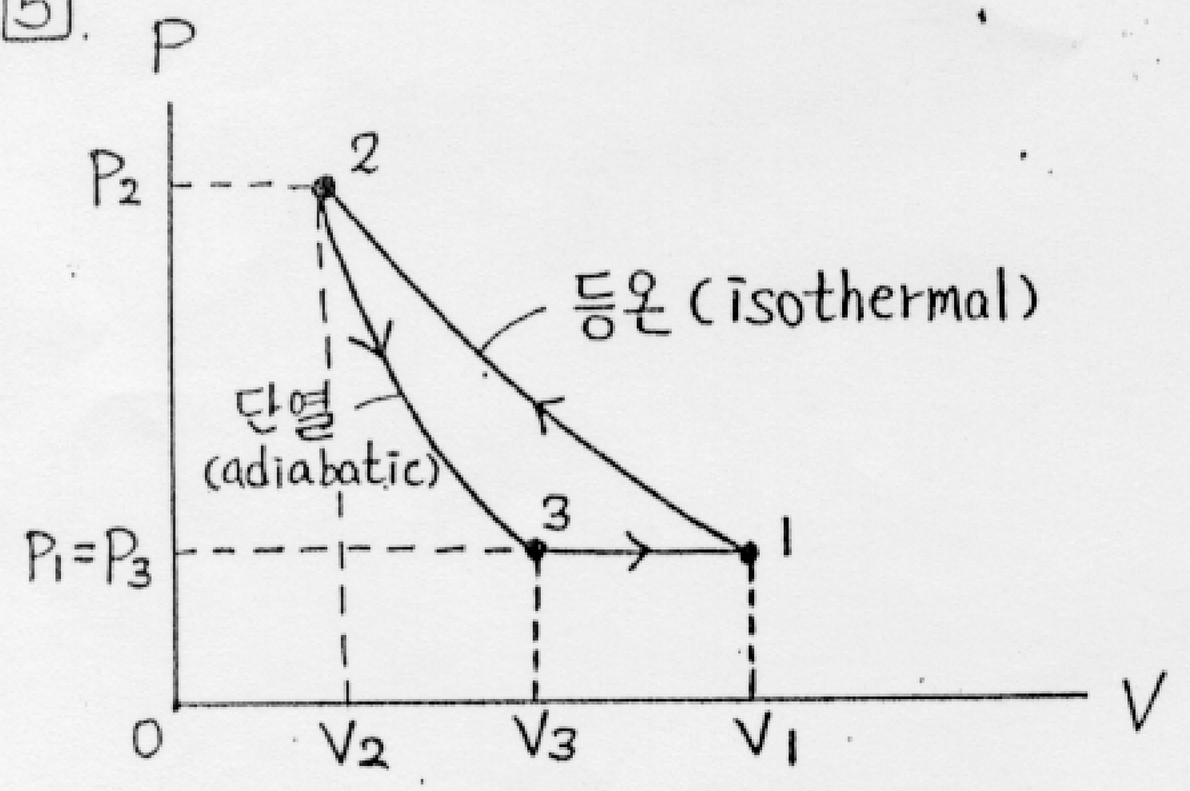
(1). 원통좌표계 에서

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{e}_z \text{ 이다.}$$

(2). 원통 좌표계에서 z축 방향의 의존성이 없는 경우, Laplace 방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \times \left(C_m r^m + D_m \frac{1}{r^m}\right)$$

5.



단원자로 이루어진 고전적 이상기체 (monatomic classical ideal gas) 1 mole이 있다. 이 기체의 상태가 그림과 같이 (1→2→3→1)의 과정을 따라 천천히 변하는 경우를 생각하자. 시작점에서 $P_1 = 3 \times 10^2 \ N/m^2$, $V_1 = 32 \ m^3$ 이었고 $V_2 = 1 \ m^3$ 이다. 각 과정에서 내부에너지 변화를 ΔU, 외부로부터 흘러들어온 열을 ΔQ, 외부에 한 일을 ΔW, 엔트로피 변화를 ΔS 라고 하자. 아래의 모든 문제에서 계산한 값은 유효숫자 두자리 까지 구하고 반드시 단위를 붙일것. 위의 그림에서 (1→2)는 등온과정, (2→3)은 단열과정 이고, $R = 8.31 \ J/mol.K$, $\ln 2 = 0.693$, $C_P/C_V = \frac{5}{3}$ (단원자 기체) 이다.

(가). (1→2) 과정에서 ΔU, ΔQ, ΔW, ΔS 를 각각 구하라.

(나). V_3 의 값은?

(다). 한 싸이클 전체 (1→2→3→1) 에서의 총 ΔU, ΔQ, ΔW, ΔS 를 각각 구하라.

(라). 만약 (V_3, P_3)의 상태에서 위의 그림과는 달리 열을 차단하고 부피가

V_1이 되도록 . 자유팽창 (free expansion) 시켰다면 이때 $\Delta U, \Delta Q, \Delta W, \Delta S$ 는?

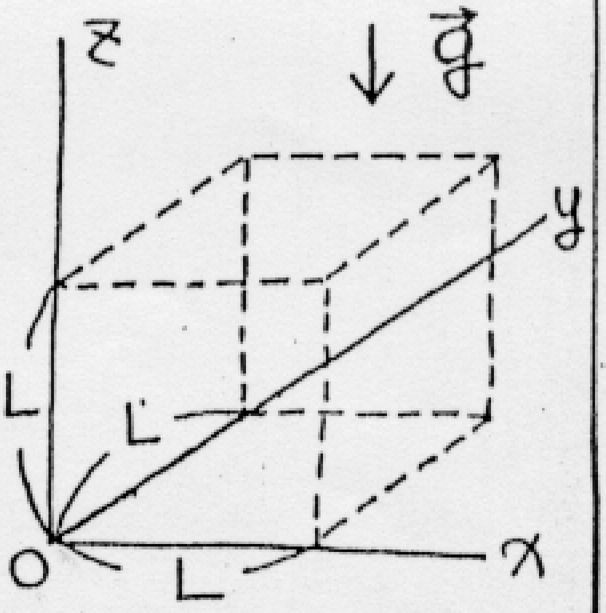
[6]. 3차원에서 해밀토니안 $H(P_1, \cdots, P_{3N}, q_1, \cdots, q_{3N})$ 으로 기술되는 고전계 (N개의 입자로 구성) 가 온도 T 에서 열평형 상태에 있다고 하자.

(가). 다음과같이 일반화된 등분배 정리 (generalized equipartition theorem)를 증명하라.

$$\langle S_i \frac{\partial H}{\partial S_j} \rangle = \delta_{ij} kT.$$

여기서 < > 는 열평균을 나타내며 S_i $(i=1, \cdots, 6N)$ 는 입자의 운동량 (p's) 이나 위치좌표 (q's) 중의 임의의 한 성분을 나타낸다. (δ_{ij} 는 델타함수, k 는 볼츠만 상수이다)

(나). 질량 m인 N개의 입자들로 이루어진 부피 $V (= L^3)$의 이상기체가 균일한 중력장 $\vec{g} = -g\hat{z}$ 내에 있을 때 그 분배함수 (partition function) 를 계산하라.



(다). (나)의 경우에 온도 T에서의 계의 평균에너지를 구하라.

(라). (다)의 결과를 (가)의 등분배 정리와 비교하여 논의하라.

[1]. 1차원 조화 진동자의 해밀토니안 연산자는

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

으로 주어진다.

(가). $$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,P$$

$$a^+ \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,P$$

로 정의할 때 $[a, a^+]$를 계산하라.

(나). H를 a와 a^+로 표시하라.

(다). H의 모든 고유치를 구하라.

(라). 기저 상태의 상태함수 $\psi(x)$를 구하라.

(마). 만약 해밀토니안이

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x),$$

여기서 $$V(x) = \begin{cases} \infty, & x \le 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases},$$

로 주어진다면 이때 기저상태의 에너지는?

[2].

(가). 임의의 규격화된 파동함수 ψ에 대해 해밀토니안 H의 기대치가 $\langle\psi|H|\psi\rangle \ge E_0$ 를 만족함을 증명하라. 단 E_0는 기저상태의 에너지이다.

(나). 1차원계에서 해밀토니안이

$$H = \frac{P^2}{2m} + \lambda x^4$$ 으로 주어진다고 하자 (여기서 $\lambda > 0$). 시행파동함수 (trial wave function)로

$\psi(x) = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2}$ 을 사용하여 기저 상태의 에너지를 근사적으로 구하고자 한다. (아래 힌트참조).

(i). 규격화 상수 C 를 구하라.

(ii) 가장 낮은 에너지 값을 주는 상수 α의 값과 그 때의 에너지를 구하라.

(힌트) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(다). 주어진 양자역학적 계의 기저상태를 Variational method 를 써서 구하는 경우, 약간 부정확한 시행 파동함수를 쓰더라도 얻어진 기저상태 에너지 값은 정확한 값에 상당히 근접한 값을 주는것이 보통이다. 이에 대한 이론적 근거를 대라.