소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 고전역학 **2007 . 07. 20 시행**

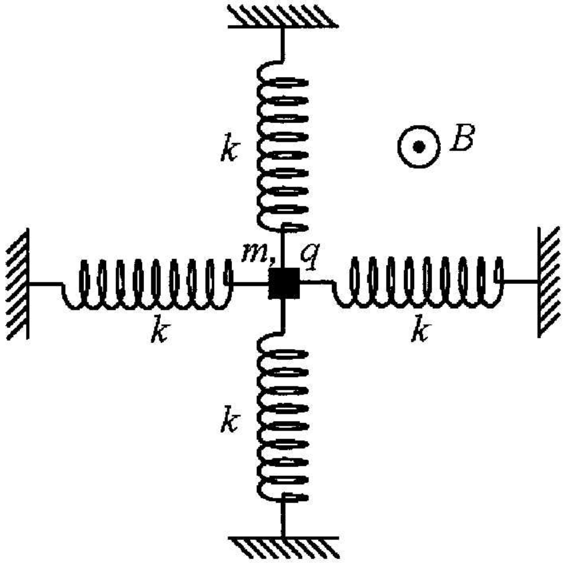
문제 1. (30점)

질량이 m이고 전하가 q인 물체가 그림과 같이 2차원 평면 위의 스프링에 달려 있다. 이때, 균일 자기장 B가 평면에 수직으로 인가되어있고, 스프링 상수는 모두 k이다.

(가) 물체가 스프링의 정지 길이 a에 비해 매우 작은 운동을 할 때, 물체의 라그랑지안 L 을 원좌표 (ρ, φ)에 대해서 쓰시오. 이때, 균일 자기장에 의한 벡터 포텐셜 $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ 이고, 포텐셜 에너지 $U_B = -q\vec{A}\cdot\vec{v}$ 이다.

(나) 라그랑지 방정식을 구하고, $l = m\rho^2\left(\dot{\varphi} + \frac{qB}{2m}\right)$ 이 보존됨을 보이시오.

(다) ρ방향으로의 힘을 구하시오.



문제 2. (30점)

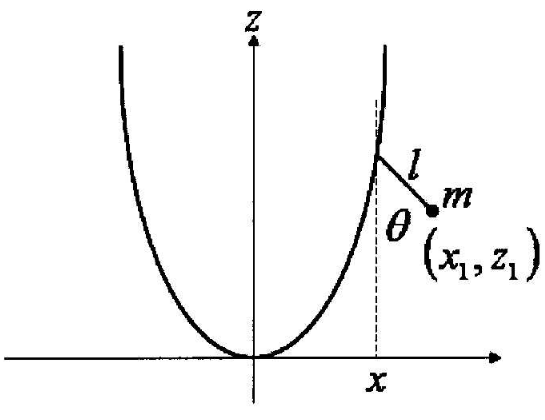
길이가 l이고, 질량이 m인 단진자가 $z = ax^2$인 포물선상을 따라 매달리어 수직면상에서 움직인다. (a는 양의 상수, g는 중력가속도, 마찰은 무시하고, 단진자 막대는 질량이 없는 강체이다.)

(가) 단진자 질량의 위치 (x_1, z_1)을 매달린 점의 x좌표 x와 단진자의 기운 각도 θ로 표시하라.

(나) 라그랑지안을 쓰라

(다) 운동량 P_x와 P_θ를 $\dot{x}$와 $l\dot{\theta}$의 함수로 구하라.

(라) $ax \ll 1$인 극한에서 $ax = 0$ 로 놓고, 보존되는 운동량을 K로 놓고, x 변수를 소거하여 θ에 대한 운동방정식을 구하라. cosθ를 시간의 함수로 구하라.



소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 고전역학 **2007 . 07. 20 시행**

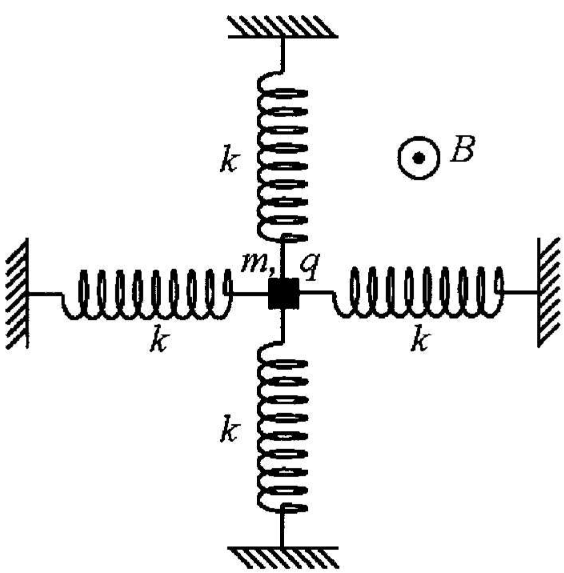
1. (30 points)

A particle of mass m and charge q is linked to springs of spring constant k on a plane as shown in the figure. A uniform magnetic field B is applied perpendicular to the plane.

(A) Write Lagrangian of the particle in the circular coordinate (ρ, φ) for a displacement much smaller than the spring length a. Here, the magnetic vector potential is given by $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ for uniform magnetic field and the magnetic potential energy is given by $U_B = -q\vec{A}\cdot\vec{v}$.

(B) Derive Lagrange equation and show that $l = m\rho^2\left(\dot{\varphi} + \frac{qB}{2m}\right)$ is conserved.

(C) Derive the force along ρ.



2. (30 points)

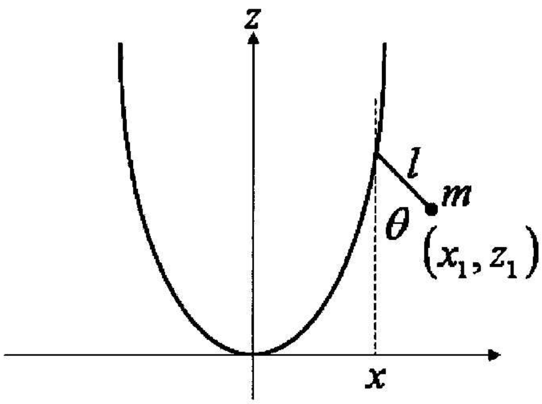
The point of suspension of a simple pendulum of length l and mass m is constrained to move on a parabola $z = ax^2$ in the vertical plane. (a is a positive constant and let g be the gravitational acceleration constant. The pendulum rod is rigid, massless, and frictionless.)

(A) Express the coordinate (x_1, z_1) of the pendulum in terms of the point of suspension x and the inclination angle θ.

(B) Obtain the Lagrangian.

(C) Obtain the momentum P_x and P_θ in terms of $\dot{x}$ and $(l\dot{\theta})$.

(D) In the flat limit $(ax \ll 1)$, let $ax = 0$. Let the conserved momentum be K. Find the equation of motion for θ by removing x variable (reduction to one degree of freedom). Solve the equation to obtain $\cos\theta$ as a function of time.



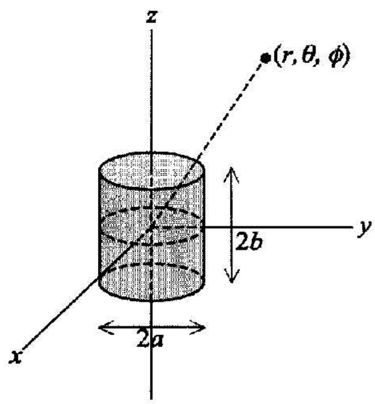
소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학 2007 . 07. 20 (금) 시행

문제 1 (40점)

아래 그림처럼 반지름이 a이고 높이가 $2b$인 원통형 영구자석을 고려하자. 이 영구자석의 magnetization $\overrightarrow{\mathrm{M}}$은 z축 방향으로 균일하며 크기가 M_0이다. 이 영구자석이 만드는 자기장 (magnetic induction $\overrightarrow{\mathrm{B}}$)를 구하고자 한다.



(가) Maxwell 방정식으로부터 magnetic field $\overrightarrow{\mathrm{H}}$는 scalar potential ϕ_M로부터 구할 수 있음을 보여라. 이때 effective magnetic charge density ρ_M 은 $\rho_M = -\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathrm{M}}$로 주어짐을 보여라.

(나) (가)의 결과를 이용하여 영구자석의 회전대칭축(z축이라 하자) 상의 임의의 점에서의 ϕ_M를 구하라.

(다) z축상의 임의의 점에서의 $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ 를 구하고, 그 크기들을 z의 함수로 간단히 스케치하라.

(라) 영구자석으로부터 멀리 떨어진 임의의 위치 $(r \gg a,b)$에서 $\phi_M(r,\theta,\phi)$ 를 $1/r^2$ 항까지 구하고, 그 항에 해당하는 자기 모멘트를 구하라.

문제 2 (40점)

점전하 q가 $\mathbf{r}'$에 있을 때 $\mathbf{r}$에서의 정전 포텐셜이 $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ 에 비례하는 것이 아니라 다음과 같이 $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{1+\varepsilon}$ 에 비례한다고 가정하자 ($\varepsilon > 0$).

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{1+\varepsilon}}$$

(가) 이 경우 점전하 q에 의한 전기장 $\mathbf{E}$는 어떻게 되는가?

(나) 완전한 도체로 이루어지고 내부반경이 a인 구형겁질의 내부표면에 일정한 표면전하분포 σ_0가 존재한다고 가정하자. 이 경우, 구형겁질 도체 내부($r<a$)에서 정전 포텐셜이 다음과 같이 표현됨을 보여라.

$$\Phi(r) = \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0}\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{(a+r)^{1-\varepsilon}-(a-r)^{1-\varepsilon}}{2r}\right]$$

여기서 $r = |\mathbf{r}|$ 이다.

(다) 일정한 정전압 V_0 가 구형겁질에 가하여졌을 때 구겁질 내부표면에 유도되는 σ_0와 구겁질 중심에서의 포텐셜을 각각 구하라.

(라) 현재 Cavendish형태의 실험에서 구한 ε의 극한치는 3×10^{-16}정도이다. 만약 10kV의 전압이 구겁질에 가하여 진다면 구겁질과 중심사이의 전압차 ΔV는 얼마인지 구하라. 단, ε이 1 보다 매우 작다는 근사를 사용할 수 있으며 $2^{\varepsilon} \simeq 1+\varepsilon\log_e 2 \simeq 1+0.7\varepsilon$로 근사하여도 무방하다.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학 **2007 . 07. 20 (금) 시행**

문제 3 (40점)

원점에 고정된 양전하 q 를 중심으로 하여 음전하 $-q$ 가 반지름 a를 갖고 원운동 하고 있다. 다음 물음에 답하라.

(가) 이 계의 전기 쌍극자 모멘트 $\mathbf{p}(t)$ 를 시간의 함수로 구하라.

(나) 이 계로부터 먼 거리 $r(r \gg a)$ 만큼 떨어진 곳에서의 벡터 포텐샬

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)$$

를 구하라.

(다) 위의 벡터 포텐샬로부터 r이 큰 경우 자기장 $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ 를 구하고 $|\mathbf{B}|^2$ 의 시간 평균을 구하라.

(라) 이때 단위 시간당 발산되는 total radiation energy를 구하라.

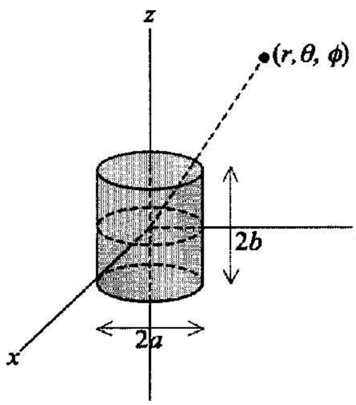
소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학 **2007 . 07. 20 (금) 시행**

Problem 1 (40points)

Consider a cylindrical permanent magnet with radius a and height $2b$ as shown below. The magnetization $\vec{\mathrm{M}}$ of this magnet is directed along z axis with a uniform magnitude M_0. We want to find the magnetic induction $\vec{\mathrm{B}}$ generated by this magnet.



(a) From Maxwell equations, show that the magnetic field $\vec{\mathrm{H}}$ can be obtained from a scalar potential ϕ_M Show that we can assume an effective magnetic charge density ρ_M which is given by $\rho_M = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{M}}$.

(b) By using the results in (a), calculate ϕ_M along the rotational symmetric axis (let us call it z axis) of the cylindrical magnet.

(c) Find $\vec{\mathrm{H}}$ and $\vec{\mathrm{B}}$ along z axis, and sketch your results in a simple plot.

(d) Find the scalar potential $\phi_M(r,\theta,\phi)$ at a location far from the magnet $(r \gg a,b)$ up to $1/r^2$ order, and find the magnetic moment associated with that order.

Problem 2 (40points)

Let us imagine that we are living in a world where the electric potential at $\mathbf{r}$ due to a point charge q located at $\mathbf{r}'$ is proportional to $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{1+\varepsilon}$, not to $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ as usual $(\varepsilon > 0)$. Specifically, the electric potential is given by

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{1+\varepsilon}}$$

(a) What is the electric field $\mathbf{E}$ from a point charge q in this new world?

(b) Consider a spherical shell made of perfect conductor whose inner radius is a and give a uniform surface charge density of σ_0 on the inner surface. Show that the potential inside the spherical shell $(r < a)$ is given as

$$\Phi(r) = \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0}\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{(a+r)^{1-\varepsilon}-(a-r)^{1-\varepsilon}}{2r}\right]$$

where $r = |\mathbf{r}|$.

(c) When a constant potential V_0 has been applied on the spherical shell, what are the charge density σ_0 induced on the inner surface of the shell and the potential at the center of the spherical shell, respectively?

(d) The current limit on ε from Cavendish type measurement is about 3×10^{-16}. If we apply a voltage of 10kV on the spherical shell, what would be the potential difference ΔV between the spherical shell and the center? You can use an approximation that ε is small compared to 1 and you might find it useful to know that $2^\varepsilon \simeq 1+\varepsilon\log_e 2 \simeq 1+0.7\varepsilon$.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전자기학 **2007 . 07. 20 (금) 시행**

Problem 3 (40points)

A negative charge $-q$ is rotating, with a radius a, around a positive charge q fixed at the origin. Answer the following questions.

(a) Obtain the time-dependent dipole moment $\mathbf{p}(t)$ of this system.

(b) The vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ at a large distance $r(r \gg a)$ away from this dipole is given as

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)\ .$$

(c) Obtain the explicit expression for the magnetic induction $\mathbf{B}$ at a large enough distance from the dipole $r(r \gg a)$ and also the time-averaged $|\mathbf{B}|^2$.

(d) Obtain the total radiation energy per unit time.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 07. 20 시행**

문제 1. (40점)

다음 식에 주어진 1차원 퍼텐셜 $V(x)$의 공간에 질량 m의 입자가 있다.

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{for } x < 0 \\ -V_0, & \text{for } 0 \le x \le a \\ 0, & \text{for } x \ge a \end{cases}$$

(가) 가장 낮은 에너지 속박상태의 파동함수의 모양을 그려보라.

(나) 속박상태의 에너지 준위를 결정하는 관계식을 $z \equiv la \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}$ 과 $z_0 \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$ 로 표시하라.

(다) 단 한 개의 속박 상태만 존재하는 조건을 구하라.

(라) 무한대 퍼텐셜 우물이 되는 경우, 즉, $V_0 \to \infty$, 속박상태의 조건을 구하라.

(마) $V_0 = 32\hbar^2/ma^2$일 때, 속박상태의 수를 구하라.

(바) $V_0 = 32\hbar^2/ma^2$일 때, 속박상태 중 가장 높은 에너지를 갖는 상태의 입자가 퍼텐셜 우물 밖에서, 즉, $(x > a)$ 에서 발견될 확률을 구해 z와 z_0로 답하라.

문제 2. (40점)

$\vec{J}$는 각운동량의 벡터 연산자(angular momentum operator)이고 다음의 관계식을 만족한다.

$$[J_i\,,\ J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k\ , \qquad J_i^\dagger = J_i$$

$|jm>$은 J^2 와 J_3 의 eigenstate 이며 다음의 관계식을 만족한다.

$$J^2\,|jm> = \hbar^2 j(j+1)|jm>$$

$$J_3\,|jm> = \hbar m\,|jm>$$

$\vec{A}$는 벡터 연산자(vector operator)이고 다음의 관계식을 만족한다.

$$[J_i\,,\ A_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,A_k$$

(가) 다음의 관계식들이 성립함을 보여라.

$< j'm'|\,A_3|jm> = 0$ unless $m' = m$.

$< j'm'|\,A_+\,|jm> = 0$ unless $m' = m+1$.

$< j'm'|\,A_-\,|jm> = 0$ unless $m' = m-1$.

여기서 $A_\pm = A_1 \pm i A_2$.

(나) 다음의 관계식들이 성립함을 보여라.

$$\vec{J}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{J}$$

$$[J_i, \vec{A}\cdot\vec{J}] = 0$$

$$[J^2, \vec{A}\cdot\vec{J}] = 0$$

(다) 다음의 관계식들이 성립함을 보여라.

$< j'm'|\,J_i\,(\vec{J}\cdot\vec{A})|\,jm> = 0$ unless $j' = j$.

(라) 파동함수 $|\psi>$를 다음과 같이 회전변환한다.

$$|\psi'> = \exp(\frac{iJ_3\theta}{\hbar})\,|\psi>$$

이때 각운동량의 기대치를 다음과 같이 정의한다.

$$< J_i > = <\psi|J_i|\psi>$$

$$< J_i' > = <\psi'|J_i|\psi'>$$

이때 $< J_i >$ 와 $< J_i' >$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$<\vec{J}'> = D(\theta) <\vec{J}>$$

이때 $D(\theta)$ 행렬(matrix)을 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 07. 20 시행**

문제 3. (40점)

2차원 평면에서 운동하는 질량 m, 전하 $q\ (>0)$의 입자를 생각하라. 이 입자는 원점에 놓인 탄성계수 k, 길이 r_0의 (질량이 없는) 막대에 연결되어 있다.

(가) (r,ϕ) 극좌표계에서 이 입자계의 라그랑지안을 적으면 다음과 같다.

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2.$$

이 입자계의 해밀토니안 H_0과 고전역학적 운동방정식을 구하라.

(나) 이 입자계의 양자역학적 상태를 고려할 때, 막대의 길이 r_0에 비해 입자의 r-방향의 운동의 길이 크기 ξ_0가 매우 작다고 가정하자. 다시 말해서 $\omega_0=\sqrt{k/m}$라 할 때, $\xi_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\ll r_0$ 이다. 이 입자계의 양자역학적 해의 고유치가

$$\epsilon^{(0)}_{n_1,n_2}=A\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+B\,n_2^2,$$

으로 근사될 수 있음을 보이고, (단, n_1은 자연수, n_2는 정수이다.) 이 식의 계수 A와 B를 ω_0, m, r_0, $\hbar$ 으로 나타내라.

(다) 일정한 외부 전기장 $\vec{E}_0$가 x-축 방향으로 가해진 경우, 이 입자계에 작용하는 섭동항 H_1을 고려해야 한다.

$$H_1=-q\vec{E}_0\cdot\vec{r}=-qE_0r\cos\phi.$$

$\xi_0/r_0\to 0$ 극한을 고려하여, 이 입자의 바닥상태 에너지 고유치 $\epsilon^{(0)}_{0,0}$에 대한 섭동에너지 $\epsilon^{(1)}_{0,0}$을 $\lambda=qE_0r_0$의 2차항까지 구하라.

(라) 위의 (다) 문항에서, 전기장 E_0의 크기가 아주 커져서 $\lambda\gg B$ 조건을 만족한다면, 기존의 $|n_1=0,n_2=0>$ 상태는 더 이상 바닥상태가 될 수 없다. $\xi_0/r_0=0$라 가정하고, H_0+H_1에 대한 새 바닥상태에 대해 간략히 기술하시오.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 07. 20 시행**

1. (40 points)

A particle of mass m is in a one-dimensional potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{for } x < 0 \\ -V_0, & \text{for } 0 \le x \le a \\ 0, & \text{for } x \ge a \end{cases}$$

(a) Sketch the wave function for the lowest bound state.

(b) Find the relation between

$z \equiv la \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}$ and $z_0 \equiv \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$ which determines the energy level of the bound states.

(c) Find the condition for existence of at least one bound state.

(d) Find the condition for the bound states when the problem approaches to the infinite square potential well, i.e., $V_0 \to \infty$.

(e) When $V_0 = 32\hbar^2/ma^2$, how many bound states are there?

(f) When $V_0 = 32\hbar^2/ma^2$, what is the probability that the particle in the highest-energy bound state would be found outside the well $(x > a)$? Express the answer in terms of z and z_0.

2. (40 points)

Let $\vec{J}$ be the angular momentum vector operator which satisfy the following relationship:

$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$, $J_i^\dagger = J_i$

Let $|jm>$ be a simultaneous eigenstate of J^2 and J_3.

$$J^2|jm> = \hbar^2 j(j+1)|jm>$$
$$J_3|jm> = \hbar m|jm>$$

Consider a vector operator $\vec{A}$, which satisfies the following commutation relation:

$$[J_i, A_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}A_k$$

(a) Show that the following relationships are valid:

$<j'm'|A_3|jm> = 0$ unless $m' = m$.

$<j'm'|A_+|jm> = 0$ unless $m' = m+1$.

$<j'm'|A_-|jm> = 0$ unless $m' = m-1$.

where $A_\pm = A_1 \pm iA_2$.

(b) Show that the following relationships are valid:

$$J \cdot A = A \cdot J$$
$$[J_i, A \cdot J] = 0$$
$$[J^2, A \cdot J] = 0$$

(c) Show that the following claim is valid:

$<j'm'|J_i(J \cdot A)|jm> = 0$ unless $j' = j$.

(d) Consider the following transformation of the wave function $|\psi>$.

$$|\psi'> = \exp\left(\frac{iJ_3\theta}{\hbar}\right)|\psi>$$

The expectation values of the angular momentum vectors are defined as

$$<J_i> = <\psi|J_i|\psi>$$
$$<J_i'> = <\psi'|J_i|\psi'>$$

Then the relationship between $<J_i>$ and $<J_i'>$ is

$$<\vec{J}'> = D(\theta)<\vec{J}>$$

Obtain the $D(\theta)$ matrix.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 07. 20 시행**

3. (40 points)

Consider a particle with mass m and charge $q\ (>0)$, attached to a (massless) rod of length r_0 with spring constant k at the origin, moving in a two-dimensional plane.

(a) In the cylindrical coordinate of (r,ϕ), we can write down the Lagrangian as

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}k(r-r_0)^2.$$

Find the Hamiltonian H_0 and the *classical* equation of motion.

(b) Now, turning it to quantum mechanics, suppose that the length scale, ξ_0, of the radial degree of freedom is much smaller than the rod length, r_0:

$\xi_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\ll r_0$ where $\omega_0=\sqrt{k/m}$.

Show that the eigenvalues can be approximated as

$$\epsilon^{(0)}_{n_1,n_2}=A\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+B\,n_2^2,$$

where n_1 is a natural number and n_2 an integer, and find the coefficients A and B in terms of ω_0, m, r_0, and $\hbar$.

(c) When a constant electronic field $\vec{E}_0$ is applied along the x-axis within the plane, we need to consider the perturbing term

$$H_1=-q\vec{E}_0\cdot\vec{r}=-qE_0r\cos\phi.$$

In the limit of $\xi_0/r_0\to 0$, calculate the energy correction $\epsilon^{(1)}_{0,0}$ up to the second order in $\lambda=qE_0r_0$ to the ground state $\epsilon^{(0)}_{0,0}$.

(d) In (c), *if* the electric field E_0 becomes large so that $\lambda\gg B$, then the $|n_1=0,n_2=0>$ state can no longer be a ground state.

Assuming that $\xi_0/r_0=0$, describe briefly about the new ground state of H_0+H_1.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 통계역학 **2007 . 07. 20 시행**

1. (30점) 상호작용하지 않는 N개의 질량 m인 (구분가능한) 고전적 알갱이들이 퍼텐셜 $U(r)=(1/2)Kr^2$ 에서 움직이고 있는 온도 T의 계를 생각하자.

(가) 계의 분배함수(partition function)을 구하라.

(나) 계의 내부에너지 E를 구하고, 그 결과를 등분배정리(equipartition theorem)의 관점에서 논의하라.

(다) 엔트로피 $S(E,N)$ 및 화학퍼텐셜(chemical potential) $\mu(T,N)$를 계산하라.

(라) 원점으로부터 알갱이들의 제곱평균제곱근(rms) 거리는 얼마인가?

참고:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

2. (30점) 두 개의 서로 다른 원자로 이루어진, 상호작용하지 않는 분자들 N개를 생각하자. 각 분자들의 질량중심은 하나의 격자점에 고정되어 있다. 분자들은 자신의 질량중심 주위로 회전하며, 이는 해밀토니안

$$H=\frac{L^2}{2I}$$

으로 표시할 수 있다. 여기서 I는 분자 하나의 회전관성, L은 각운동량이다.

(가) 이 계가 고전적이라고 가정하고, 온도 T에서 분배함수(partition function)와 분자당 평균에너지를 구하여라.

(나) 이제부터는 이 계를 양자역학적으로 기술한다. 온도가 높은 극한[$T \gg \hbar^2/(2Ik_B)$]에서 분배함수와 분자당 평균에너지를 구하여라. 그 결과가 (가)에서 얻은 고전적 결과와 같음을 보여라.

(다) 온도가 낮은 극한[$T \ll \hbar^2/(2Ik_B)$]에서 분자당 평균 에너지를 제일 큰 항(leading order)까지 계산하여라.

(라) 분자를 이루는 두 원자가 스핀 0의 꼭같은 보존(identical boson)일 때, (다)의 계산을 반복하여라.

참고:

1. $$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

(θ와 ϕ는 각각 구면좌표계의 극각(polar angle), 방위각(azimuthal angle)이고, p_a는 $a(=\theta,\phi)$에 대응되는 운동량이다.)

2. L^2의 고유값은 $\hbar^2 l(l+1)$, $l=0,1,2,\cdots$으로 주어진다.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

Subjetct: Statistical Mechanics **Date: 2007 . 07. 20**

1. (30 points) Consider a system of N non-interacting (distinguishable) classical particles of mass m, all moving in the potential $U(\mathbf{r}) = (1/2)Kr^2$ at temperature T.

(a) Compute the partition function of the system.

(b) Evaluate the internal energy E of the system and discuss the result in view of the equipartition theorem.

(c) Compute the entropy $S(E,N)$ and the chemical potential $\mu(T,N)$.

(d) What is the root-mean-square distance of a particle from the origin?

2. (30 points) We consider N non-interacting molecules composed of two different atoms. The center of mass of each molecule is fixed on a lattice point. Each molecule rotates around its center of mass, which is governed by the Hamiltonian

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2I},$$

where I is the rotational inertia of a molecule and $\mathbf{L}$ is an angular momentum.

(a) Assume that the system is classical and find the partition function of the system and the average energy per molecule at temperature T.

(b) Henceforth we treat the system fully quantum-mechanically Evaluate the partition function and the average energy per molecule in the high-temperature limit $[T \gg \hbar^2/(2Ik_B)]$. Show that the results reduce to the classical ones obtained in (a).

(c) In the low-temperature limit $[T \ll \hbar^2/(2Ik_B)]$ calculate the average energy per molecule up to the leading order.

(d) In case that two atoms in a molecule are identical bosons with spin 0, repeat the calculation in (c).

Note:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

2. $\displaystyle \mathbf{L}^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$

(θ and ϕ are the polar and the azimuthal angles in the spherical coordinates, respectively, and p_a denotes the momentum corresponding to the coordinate $a(=\theta,\phi)$)

3. Eigenvalues of $\mathbf{L}^2$ are $\hbar^2 l(l+1)$ with $l = 0, 1, 2, \cdots$.