소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전기역학 **2007 . 01. 26 (금) 시행**

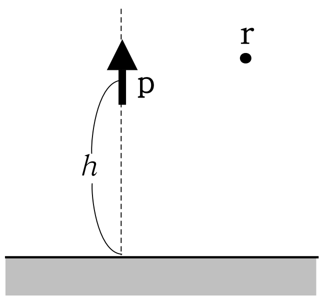
문제 1 (40점)

다음은 전기쌍극자 (electric dipole)를 도체 가까이 접근시켰을 때 발생하는 전기적 효과를 알아보기 위한 물음이다. ($1/4\pi\epsilon_0 = 1$ 로 놓는다.)

(가) 먼저 외부 전기장 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$가 걸린 공간의 어떤 점 $\mathbf{R}$에 전기쌍극자 $\mathbf{p}$를 가져다 놓을 경우, 전기쌍극자는 다음과 같은 힘을 받게 됨을 보여라.

$$\mathbf{F} = -\nabla\left[-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{R}}$$

(나) 이제 전기쌍극자 $\mathbf{p}$가 접지된 완전무한도체평면에서 높이 h인 곳에 놓여있다고 가정하자. 단, $\mathbf{p}$의 방향은 평면에 수직인 방향이다 (그림 참조). 이 때 도체평면 상반부 ($z>0$영역) 임의 점 $\mathbf{r}$에서 정전기적 퍼텐셜을 구하고, 그것의 어떤 항이 도체표면에 유도된 전하로부터 오는 것인지 명시하라.



(다) 문항 (나)의 결과를 이용하여 전기쌍극자 $\mathbf{p}$가 주어진 위치에서 받는 정전기적 힘을 구하라. 이 때 힘의 방향은 어느 방향인가?

(라) 전기쌍극자 $\mathbf{p}$를 주어진 위치로부터 도체에서 무한히 멀리 떨어진 위치까지 옮기려면 얼마만큼의 일(work)이 필요한가?

문제 2 (40점)

고전전자기 관점에서 볼 때 응집물질은 고전조화진동자로 구성되어 있다. 즉, 응집물질을 구성하고 있는 원자들의 전자를 고전조화진동자로 보는 것이다. 이 경우, 전자의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

여기서 γ는 감쇠상수이고 ω_0는 조화진동자의 진동주파수이다.

(가) 매질의 원자농도를 N, 원자당 전자의 수를 1개로 볼 때, 매질의 electrical susceptibility χ를 주파수 ω의 함수로 계산하라. 단, 매질의 플라즈마 주파수 ω_p가 $\omega_p^2 << \gamma\omega_0$의 조건을 만족시킨다고 가정한다. 전자의 질량을 m, 전하를 e 로 표시할 때 ω_p는 $\omega_p^2 = Ne^2/m\epsilon_0$로 정의된다.

(나) $\omega_p << \omega_0$의 조건 아래에서 매질의 복소수 굴절률$n = n_r + in_i$를 $\omega \simeq \omega_0$근방에 대하여 ω의 함수로 구하면 다음과 같음을 보여라.

$$n_r \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0}\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0-\omega)^2 + (\gamma/2)^2}$$

$$n_i \simeq \frac{\omega_p^2}{8\omega_0}\frac{\gamma}{(\omega_0-\omega)^2 + (\gamma/2)^2}$$

(다) 매질의 길이를 L이라 할 때 매질을 통과한 평면전자기파의 인텐시티 $I(L)$를 주파수 ω의 함수로 구하고 간단히 스케치 하라. $I(L)$의 최소값은 무엇인가? 여기서 입사 인텐시티는 I_0로 표시한다.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

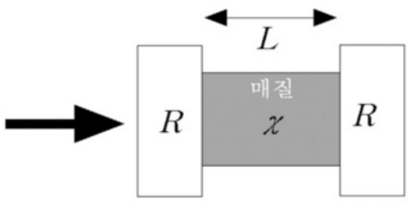
물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전기역학 **2007 . 01. 26 (금) 시행**

(라) 매질의 처음과 끝에 반사율이 $R(\approx 1)$인 평면반사경을 놓아 공진기를 구성한다고 가정하자. 이 경우, 공진기의 투과함수 T는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T = \frac{(1-R)\eta}{[1-R\eta]^2 + 4R\eta \sin^2 k_r L}$$

여기서 $\eta = \exp(-2k_i L)$이고 $k_r = n_r \omega / c, k_i = n_i \omega / c$ 이다. 우선, 공진기가 비어 있는 경우, 즉 $n=1$인 경우, 투과함수가 최대값을 갖는 ω의 값, 즉 공진기의 공진주파수와를 구하라. 또, 공진선폭(full width at half maximum) $\Delta\omega$ 및 공진기 품위값(quality factor) Q의 최소값을 구하라.



(마) 이제 공진기 안에 매질이 들어 있는 경우를 고려하자. 단, 공진기의 특정 공진주파수가 매질의 공진주파수 ω_0와 정확히 같다고 가정하자. $\omega_p \gg \gamma$의 조건이 만족될 때, 공진기-매질 시스템의 투과함수가 보이는 새로운 공진주파수를 근사적으로 구하라.

문제 3 (40점)

질량 m, 전하 q를 가진 입자가 속도 v로 크기가 B인 일정한 자기장 안으로 들어갔다. 이 때, v의 방향은 B의 방향에 수직이다. ($1/4\pi\epsilon_0 = 1$ 로 놓는다.)

(가) 입자 궤적의 곡률반경 R를 구하라.

(나) 입자가 가속운동을 하고 있으므로 전자기파가 발생된다. 입자가 방출하는 총 전자기파 에너지를 시간평균을 하면 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$P_1 = \frac{2q^2}{3c^3}\omega_0^4 R^2$$

여기서 $\omega_0 = qB/mc$ 이다.

힌트: Larmor의 공식 $P = (2q^2/3c^3)|\ddot{\mathbf{x}}|^2$, 또는 진동하는 쌍극자가 방출하는 전자기에너지의 공식 $(2/3c^3)|\ddot{\mathbf{p}}|^2$ 을 이용하라.

(다) 외부로 방출되는 전자기파로 인하여 입자의 에너지는 시간에 따라 감소하게 된다. 고전적인 운동에너지를 사용하여 입자궤도의 곡률반경이 시간에 따라 다음과 같이 변함을 보여라.

$$R = R_0 e^{-\alpha t}$$

여기서 R_0는 $t=0$에서의 궤도반경이며 $\alpha = 2q^2\omega_0^3/3mc^3$이다.

(라) 이제 입자 원궤도의 중심에 반경이 R_0인 완전도체구를 놓았을 때 입자와 도체구를 포함한 전체 시스템에서 방출되는 전자기 에너지를 시간평균을 하면 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$P_2 = \frac{2q^2}{3c^3}\omega_0^4 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)^2 R^2$$

(마) (라)의 경우, 원래의 전하가 방출하는 에너지 외에 이미지 전하가 방출하는 에너지가 더해진 것임에도 불구하고 $P_2 < P_1$의 결과가 얻어진다. 그 이유를 간단히 설명하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 역학 **2007 . 01. 26 (금) 시행**

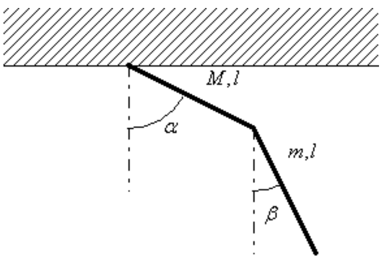
문제 1. (30점)

아래 그림과 같이 두 개의 막대가 천정에 매달려있다. 두 막대의 길이는 각각 l로 둘이 같으나, 무게는 그림과 같이 각각 M과 m으로 다르다. 막대의 연결부위는 자유롭게 움직이며, 중력가속도 g는 수직 아래 방향으로 걸려있다.

(가) 막대 각각에 대해, 막대 중심에 대한 회전관성을 구하시오.

(나) 각 α와 β가 1보다 무척 작은 경우, 막대 운동에 관한 라그랑지안을 쓰시오.

(다) $M=5m$ 인 경우, 고유진동수를 구하시오.



문제 2. (30점)

반경이 R인 원통 내부 표면에서 질량이 m인 물체가 미끄러지는 운동을 한다. 원통 내부 표면의 운동마찰력 계수는 μ로 주어져있다. 중력은 작용하지 않는다.

(가) 순간속도의 접선성분을 v_θ, 원통축성분을 v_z로 쓸 때, 마찰력의 크기와 방향을 기술하시오.

(나) 시간 $t_i=0$에서 초기 속도가 $v_\theta(t_i)=v_0$, $v_z(t_i)=0$으로 주어졌을 때, 속도가 반으로 줄어드는 순간의 시간 t_f와 이때까지 이동한 거리 l을 구하시오.

(다) 시간 $t_i=0$에서 초기 속도가 $v_\theta(t_i)=v_0/\sqrt{2}$, $v_z(t_i)=v_0/\sqrt{2}$로 주어졌을 때, 속도가 반으로 줄어드는 순간의 시간 t_f와 이때까지 이동한 거리 l을 구하시오.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 01. 26 시행**

1. (40점) 1차원 우물 퍼텐셜 $V_0(x)$에 놓인 스핀 0인 입자를 고려하자.

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & , |x| < a \\ +\infty & , |x| > a \end{cases}$$

(가) 퍼텐셜 $V_0(x)$의 대칭성, 즉 $V_0(-x) = V_0(x)$을 고려하면, 이 입자의 양자역학적 해는 다음과 같이 우함수 $u_l^e(x)$와 기함수 $u_l^o(x)$ 해로 구할 수 있다.

$$\begin{cases} H_0 u_l^e(x) = E_l^e u_l^e(x) \\ H_0 u_l^o(x) = E_l^o u_l^o(x), H_0 = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + V_0(x) \end{cases}$$

주어진 $V_0(x)$에 대한 even-parity (우함수) 및 odd-parity (기함수) 해의 고유값 E_l^e, E_l^o과 고유함수 u_l^e, u_l^o를 구하라.

위에서 주어진 우물 퍼텔셜에 x=0 점에 델타 함수 퍼텐셜이 다음과 같이 추가되었다.

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{\hbar^2}{2ma} v_o \delta(x) & , |x| < a \\ +\infty & , |x| > a \end{cases}$$

여기서 v_o는 $-\infty < v_o < +\infty$의 범위에 값을 가질 수 있다.

(나) 주어진 $V(x)$ 퍼텐셜에 대한 슈뢰딩거방정식에서 $v_o \approx 0$, 즉, $|v_o| \ll 1$인 경우, 그 해가 (가)에서 구한 고유함수로 근사할 수 있다. 우함수 및 기함수 해 각각에 대해 v_o의 1차항까지 고유값의 변화 ΔE_l^e과 ΔE_l^o를 구하라.

(다) $|v_o| \to \infty$극한에서의 해를 구하면 우함수와 기함수의 해가 겹침 (degenerate)을 보여라.

(라) $V(x)$ 퍼텐셜에서 v_o의 크기가 $-2 < v_o < 0$영역에 있는 경우에만, $0 < E_o < \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^2$의 양수 에너지 고유값이 존재할 수 있음을 보여라. 이때 $0 < (v_o + 2) \ll 1$ 극한에서 $E_o = \dfrac{\hbar^2}{4ma}(v_0 + 2)$로 주어짐을 보여라.

(마) $v_0 < -2$의 경우, $E_b < 0$ 구속상태의 음수에너지 해가 존재한다. 이 구속상태의 해를 구하기 위한 조건식을 구하고, $|v_o| \gg 1$ 극한에서 구속에너지 E_b를 구하라.

2. (40점) z-축 방향으로 균일한 크기 B의 자기장이 가해진 2차원 xy-평면에서 전자의 운동은 다음과 같은 해밀토니안으로 기술된다.

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2$$

(가) 고전 역학적 운동방정식을 풀어, 초기속력 v_o의 전자에 대한 cyclotron 주파수 ω_0와 반경 R_0를 구하라.

(나) Sommerfeld 의 양자화 규칙 $\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)h$ 을 적용하여, 양자화된 전자궤도의 실공간 궤도 반경 R_n과 운동량 공간의 궤도 반경 K_n을 구하고, 그때 전자에너지가 $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$로 양자화됨을 보여라.

(다) 속력 연산자 $\vec{v}$를 $\vec{v} = [H, \vec{r}]$로 정할 수 있다. $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 연산자의 교환법칙이 다음과 같음을 보이고, α_0를 구하라.

$$[v_i, v_j] = \delta_{ij}\hbar\alpha_0 \ (i, j = x, y)$$

위 결과에 근거하여, 이 문제에 주어진 해밀토니안이 조화진동자 해밀토니안

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학 **2007 . 01. 26 시행**

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \quad \text{또는} \quad H=\hbar\omega_0\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)$$

과 동등함을 증명하라.

(라) 2차원 *xy*-평면의 크기가 (L_x, L_y)로 주어진 경우, 각 에너지 준위 E_n의 겹침수가 $g_{2D}=\phi/\phi_0$가 됨을 보여라. 여기서 $\phi=BA=BL_xL_y$는 전체자속, $\phi_0=\frac{hc}{e}$는 fundamental magnetic flux이다.

3. (40점) 전자가 z-축방향의 일정한 자기장에 놓여 있을때, 이 계의 해밀토니안은

$$H=\mu_e\vec{\sigma}\cdot\vec{B}=\frac{|e|\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

(단, $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

주어진다. 이제 시간 t=0에 전자의 스핀이 +x방향으로 놓여있다고 하자.

(가) 시간 t>0의 time dependent 슈뢰딩거 방정식을 쓰라. 시간에 따른 이 전자 스핀의 고유 함수를 구하라.

(나) 시간 $t=t_0$ 에 전자 스핀의 y성분 기대값을 구하여라.

(다) (나)에서 전자 스핀의 z성분 기대값을 구하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 통계역학 **2007 . 01. 26 시행**

1. (30점) 홀 안에 N 명의 사람이 모여 있다. 이 중 N_+ 명은 빨간 옷을, N_- 명이 흰색 옷을 입고 있다. 빨간색 옷을 입은 사람은 에너지 $\epsilon = 0$ 를 가지고 있고, 흰색 옷을 입은 사람은 에너지 $\epsilon = \epsilon_0$ 을 가지고 있다고 하자. 따라서, 상호작용을 하지 않을 때 이 계가 갖는 총 에너지는 $U_0 = N_- \epsilon_0$ 이다. 편의상 $X = (N_+ - N_-)/N$ 으로 표시한다. 사람들 간에 상호작용을 하지 않고 있을 때 다음을 구하라. N, N_+, N_- 이 모두 커서 Stirling formula 를 쓸 수 있다.

가) 이 계의 엔트로피를 N 과 X 의 함수로 구하라. 볼쯔만 상수는 k_B 로 표시할 것.

나) 이 계의 온도를 N_+ 과 N_- 의 함수로 구하라.

다) 온도가 음수가 되는 경우는 어떤 경우인지를 밝혀라. 온도가 음수가 된다는 것은 무엇을 의미하는지를 간략히 서술하여라.

다음은 사람들 간의 상호작용을 하는 경우를 생각하자. 각 사람들은 z 명의 사람과 상호작용을 할 수 있다. 같은 색을 입은 사람끼리는 $-J$ 의 세기를 갖고, 다른 색을 입은 사람끼리는 $+J$ 의 세기의 상호작용 세기를 가진다.

라) 이 계의 상호작용 에너지는 $E_I = -J(N_{++} - N_{+-} + N_{--})$ 이라고 표시할 수 있다. 여기서 N_{++} 빨간 색을 입은 사람 간의, N_{+-} 는 빨간색, 흰색 옷의 입은 사람 간의, N_{--} 는 흰색 옷을 입은 사람들 간의 상호작용을 하는 수이다. 주어진 온도에 대하여 E_I 에 대한 열역학적 평균을 구하는 대신, 모든 사람이 같은 확률로 만날 수 있다고 할 때 상호작용에너지의 평균값 U_I 을 구하라.

마) 내부에너지는 $U = U_0 + U_I$ 로 주어진다. 이 계의 Helmholtz 자유에너지를 구하고, 자유에너지를 최소화하는 자체일관적 방정식(self-consistent equation)을 구하라.

2. (30점) 이차원 평면에 N 개의 페르미온들이 놓여 있다. 각 페르미온의 질량은 m 이고, 알짜 전하는 없지만, 크기가 p 인 영구 전기쌍극자(permanent electric dipole moment)를 가지고 있고, $\vec{E} = E\hat{z}$ 의 전기장에 놓여 있다. 스핀의 축퇴는 고려하지 않는다.

가) 페르미온들은 면적이 A인 2 차원 격자점에 고정되어 있고 전기쌍극자의 방향은 3 차원 공간에서 자유롭게 회전할 수 있을 때, 단위 면적당 전기쌍극자 모멘트의 열역학적 평균값 P를 구하라. 또 무-전기장 편극율(zero-field polarizability) $\alpha = \lim_{E \to 0} \frac{P}{E}$ 를 구하라. 이 계는 온도 T 인 열원과 열접촉을 하고 있다.

나) 전기쌍극자가 z 방향으로만 배열이 가능할 때, 즉 $\vec{p} = \pm p\hat{z}$ 일 때, 평균쌍극자 모멘트 P 와 편극율 α 를 구하라.

다) 페르미온들은 면적 A 인 2 차원 공간에서 자유롭게 운동을 하고, 열원의 온도는 $T = 0$ 으로 고정되었다. 전기쌍극자가 나) 에서와 같이 z 방향으로만 놓여 있을때, 페르미 에너지 ϵ_F, 평균쌍극자 모멘트 P 와 편극율 α 를 구하라.

라) 만약 전기쌍극자 모멘트가 x 와 z 두 방향으로 배열이 가능한 경우, 즉 $\vec{p} = \pm p\hat{x}, \pm p\hat{z}$ 일때, 다) 에서와 같이 페르미 에너지 ϵ_F, 평균쌍극자 모멘트 P 와 편극율 α 를 구하라.