

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	----	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 고전역학

2005 . 01. 21 시행

1.

질량 m 인 물체가 중심포텐셜 (central potential)

$$V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{K'}{2r^2},$$

(여기서 K, K' 는 상수이고 $K > 0$)

의 영향 아래 움직이고 있다.

(가) 각 운동량 값 L 을 갖고 원 운동을 하는 경우에 반지름 r_0 를 정하고, 또 이 때 물체의 총 에너지 E_0 를 구하라.

(나) 각 운동량 값 L 에서 물체의 총 에너지 E 가 $E_0 < E < 0$ 의 조건을 만족할 때, r 의 값은 유한한 구간에서 주어진다. 이 때 r 의 최소값 ($r_{\min}$) 과 최대값 ($r_{\max}$) 을 구하라.

(다) 총 에너지 E 가 $E_0 < E < 0$ 의 조건을 만족할 때, $|K'| \ll K$ (즉, $\frac{1}{r^2}$ 포텐셜 항을 섭동항으로 생각할 수 있는 경우) 이면 물체의 운동궤도를 운동 평면 상의 극좌표 (r, θ) 를 사용해서

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\alpha\theta)},$$

(여기서 $a > 0$, $0 < \epsilon < 1$ 이고 $\alpha = 1 + O(K')$ 임)

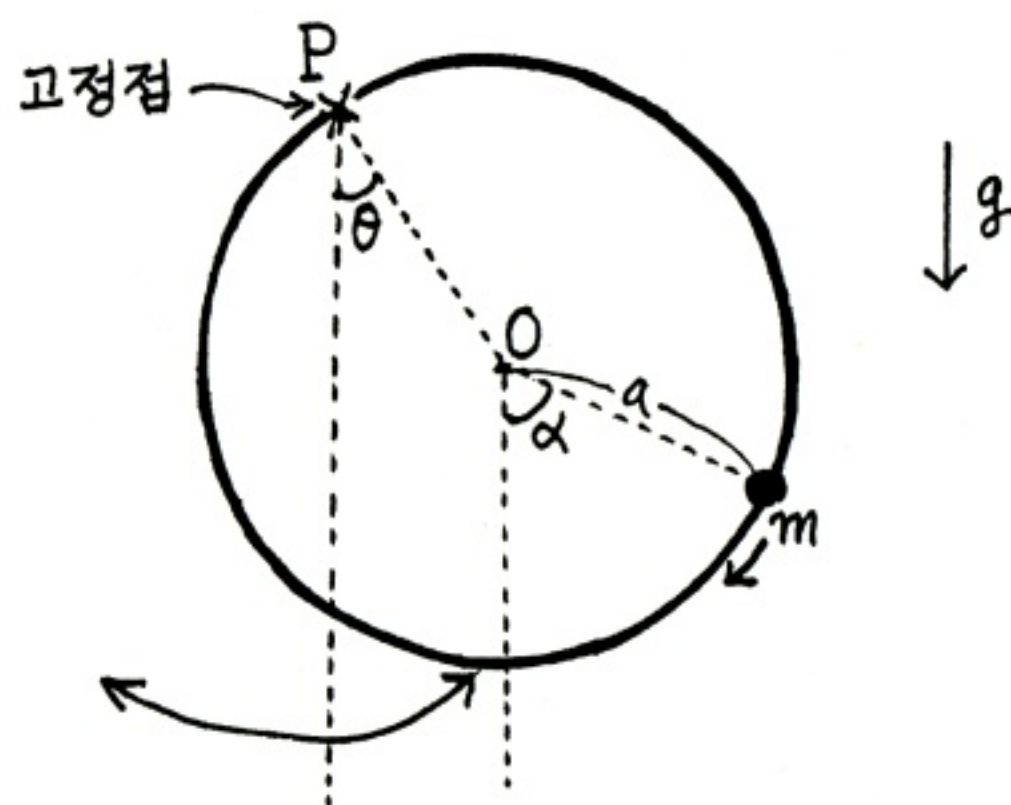
와 같은 형태로 기술할 수 있다. 이것은 세차운동을 하는 타원 궤도를 나타내고 물체가 한번 회전할 때 마다 $2\pi|1-\alpha|/\alpha$ 만큼 세차됨을 보여라.

(라) α 의 K' 값에 따른 의존도를 구체적으로

알려면 어떤 방법을 사용해야 하는가? (방법만 얘기하면 됨).

2.

총 질량이 M 이고 반경이 a 인 원형 고리에 질량 m 인 구슬이 꿰어져 있고, 고리 상의 한 점 P 는 벽에 고정되어 있을 때, 이 고리가 중력의 영향 아래 수직 평면 상에서 흔들리는 운동을 생각해 보자. (아래 그림 참조). 여기서 구슬은 고리를 따라 자유롭게 미끄러질 수 있으며 중력가속도의 크기는 g (: 상수) 로 표시하라.



(가) 먼저 구슬의 질량 m 이 고리의 질량 M 에 비해 충분히 작아서 고리의 운동에 전혀 영향을 미치지 않는다고 할 때 고리는

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2a} \sin \theta$$

(여기서 각 θ 는 그림에 표시되어 있음)와 같은 운동방정식을 만족함을 보이고, 또 고리가 $\theta = 0$ 값 주위로 작게 흔들리고 있을 때 그 진동주기를 말해보아라.

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 확 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 고전역학

2005 . 01. 21 시행

(2. 번 계속)

(나) 구슬의 질량 m 이 그렇게 작지 않은 경우에는 일반적으로 고리와 구슬을 함께 포함하는 역학계를 생각해야 한다. 이 계의 라그랑지안을 각 θ 와 α (그림 참조)를 일반화좌표로 사용해서 구하라.

(다) (나)에서 구한 라그랑지안을 바탕으로 평형점 $\theta = \alpha = 0$ 근처에서의 작은 진동 (small oscillation)을 생각하면 어떤 normal mode frequency 들이 얻어지는가?

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	----	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전 기 역 학

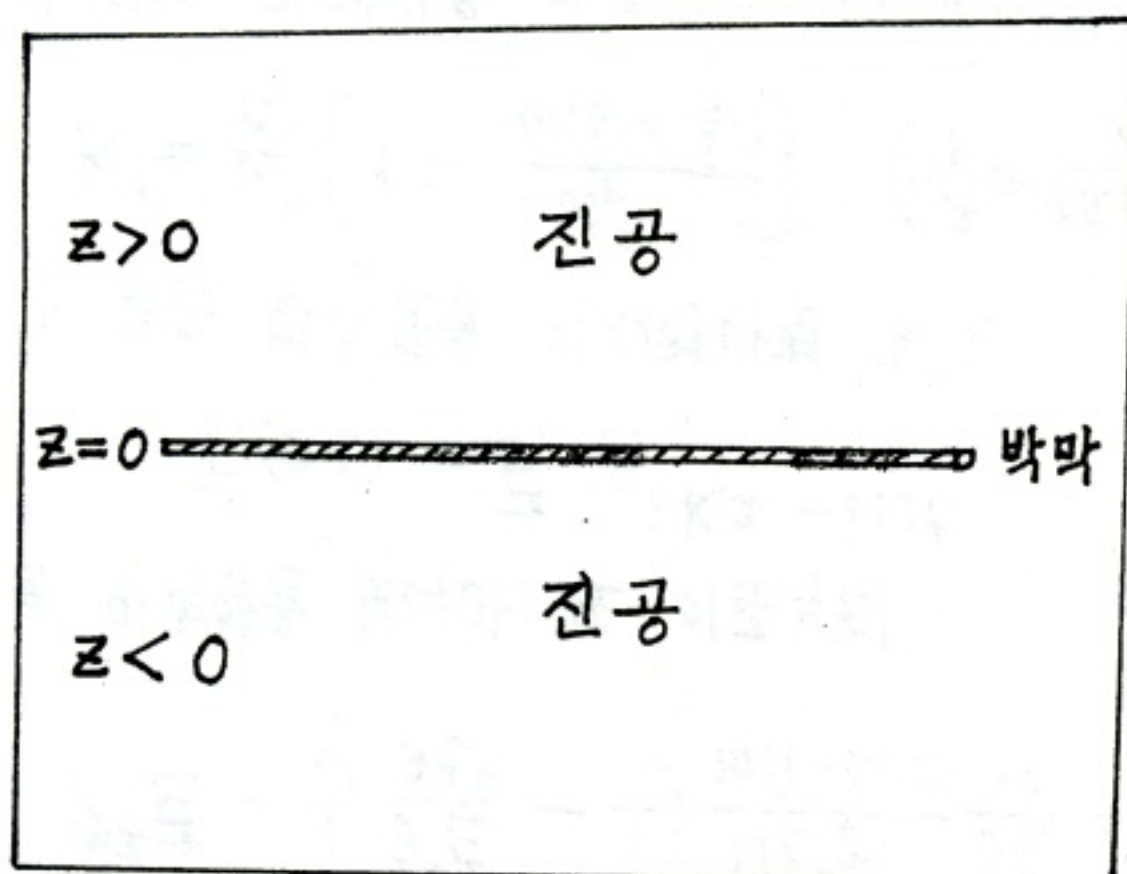
2005 . 01. 21 시행

1.

두께를 무시할 수 있는 박막을 경계로(그림 참조) 정전 포텐셜 (electrostatic potential) 이

$$\Phi(x,z) = \begin{cases} \varphi_+ \cos(k_+ x) e^{-\kappa_+ z}, & z > 0 \\ \varphi_- \cos(k_- x) e^{\kappa_- z}, & z < 0 \end{cases}$$

와 같은 형태로 주어진다고 하자.



(가) 포텐셜 $\Phi(x,z)$ 가 $z > 0$, $z < 0$ 영역에서 만족해야 하는 방정식과 박막에서의 경계조건을 쓰고, 이로 부터

$$\varphi_+ = \varphi_- (\equiv \varphi),$$

$$k_+ = k_- = \kappa_+ = \kappa_- (\equiv k)$$

임을 보여라.

(나) 진 공간에서의 전기장 $\vec{E}$ 를 x, z 의 함수로 구한 다음, 박막 근처에서 전기장의 대략적 behavior를 그림으로 나타내 보아라.

(다) 박막에 유도된 표면 전하밀도를 x 의 함수로 구하라.

※(참고) 이 문제는 금속 표면에 driving force를 걸어준 경우에 좋은 근사모형으로 쓰일 수 있다

2.

알루미늄 포일은 약 20 마이크로미터의 두께를 가지고 있다. 알루미늄 포일을 가시광선이 통과할 수 없다는 것은 경험적으로 알고 있다. 이 알루미늄 포일에 휴대전화에서 많이 쓰는 800 Mhz의 전자기파를 입사시켰을 때 통과할 것인가에 대해 고려해보자. (다시말하면 휴대전화를 알루미늄 포일로 잘 싸면 신호를 받을 수 있을 것인가에 대해 알아보자).

(가) 알루미늄 포일의 빛에 대한 반응을 (감쇄율을 갖는) 자유전자 모형을 써서 기술해보자. 전기장이 x 방향으로 크기 $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$ 를 갖고 주어진다면, 단위 부피당 N 개의 자유전자가 있을 때 전자들의 반응으로 생기는 전류의 크기는

$$J = \frac{Ne^2\tau}{m} \frac{1}{1-i\omega\tau} E_0 \equiv \frac{\sigma_0 E_0}{1-i\omega\tau}$$

로 표시될 수 있음을 보여라. (힌트: 자유전자의 운동방정식으로 $m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt} = eE(t)$, 또 $J = Nev$ 를 이용할 것).

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학인	(인)
-------	------	----	----	------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전기역학

2005 . 01. 21 시행

(문제 2. 번 계속)

(나) Maxwell 방정식

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

과 (가)의 결과를 이용해서 전기장 $\vec{E}(\vec{x}, t)$ 는

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{Ne^2 \tau}{m(1-i\omega\tau)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

을 만족함을 보여라. 또 이로부터

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{iKx - i\omega t}$$

와 같은 함수꼴을 가정한다면 K 는

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} \right], \quad (\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m})$$

와 같은 관계식을 만족함을 보여라.

(다) 알루미늄의 경우 $\omega_p \sim 1.9 \times 10^{16}$ Hz 이며

$\tau \sim 7 \times 10^{-15}$ s 로 알려져 있는데, 이러한 조건 아래 위 K 에 관한 식은

$$K^2 \approx \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} i$$

(여기서 λ 는 진공에서 파장임)

가 된다. 알루미늄 금속에서 전기장이 $\frac{1}{e}$ 만큼 감소하는 거리는

$$\delta \sim \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{2\omega}{\omega_p^2 \tau}}$$

가 됨을 보이고, 또 δ 의 수치값도 구하라.

이 결과를 바탕으로 800 MHz의 전자기파가 알루미늄 포일을 통과할 수 있을지 여부에 대해 답하라.

3.

유전체 구 (dielectric sphere)에 파장이 아주 긴 전자기파가 입사해서 생기는 산란 (scattering) 현상은 quasi-static 한 방법으로 취급할 수 있다. 이와 관련해서 다음 물음에 답하라.

(가) 먼저 균일한 전기장 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ 가 걸린 곳에

반경 a , 유전상수 (dielectric constant) ϵ 인

유전체 구를 놓았

다고 하고 (그림

참조), 이 때 전 공간

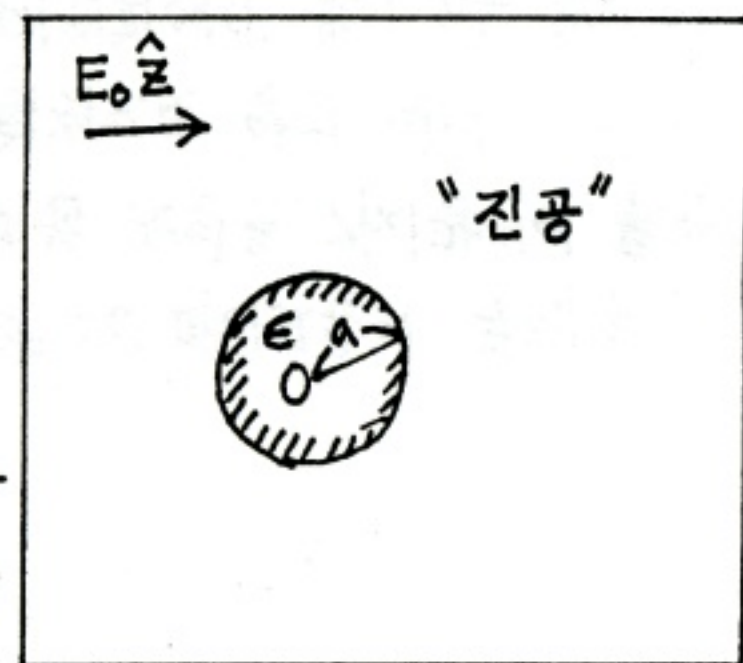
즉, 유전체 안과

바깥에서의 정전

포텐셜 (electrosta-

tic potential) $\Phi(\vec{r})$

을 구하라.



(나) (가)의 문제에서 유전체 구 주위 (안과 바깥)

에서의 전기장 $\vec{E}(\vec{r})$ 의 field line을 그림으로

표시해보고, 또 유전체에 유도된 총 전기쌍극

자모멘트 (electric dipole moment) $\vec{p}$ 는

$$\vec{p} = \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) a^3 (E_0 \hat{z})$$

가 됨을 보여라.

(다) 이제 유전체 구에 평면 전자기파 (time-dependence factor $e^{i\omega t}$ 는 생략하고 씀)

$$\vec{E}_{inc}(\vec{x}) = E_0 \hat{e}_0 e^{ik \hat{n}_0 \cdot \vec{x}},$$

$$\vec{B}_{inc}(\vec{x}) = \hat{n}_0 \times \vec{E}_{inc}(\vec{x}),$$

($k = \omega/c$, $\hat{n}_0$ 는 incident wave direction, $\hat{e}_0$ 는 (real) polarization vector로 $\hat{n}_0 \cdot \hat{e}_0 = 0$ 임)

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	----	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 전기역학

2005 . 01. 21 시행

(문제 **[3]** 번 계속)

가 입사하는 경우를 생각하자. 입사한 전자기파의 파장이 충분히 길어서 $ka \ll 1$ 이라는 조건을 만족할 때,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{n}_0) = \frac{\text{(scattered energy flux per unit solid angle in the direction } \hat{n})}{\text{incident energy flux}}$$

처럼 정의되는 미분 산란단면적 (differential scattering cross section) 은 우리 문제의 경우

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{n}_0) = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 k^4 a^6 |\hat{n} \times \vec{E}_0|^2$$

와 같이 나타낼 수 있음을 보여라.

[※(힌트) 원점 근처에서 각 진동수 ω 로 진동하는 전기쌍극자모멘트 $\vec{p}$ 가 있을 때 radiation zone 에서의 전자기장은

$$\vec{B}_{\text{rad}}(\vec{r}) \sim k^2 (\hat{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}) \sim \vec{B}(\vec{r}) \times \hat{n}$$

$$(\hat{n} \equiv \vec{r}/r, \quad k \equiv \omega/c)$$

처럼 주어진다.]

(라) 입사 전자기파가 'unpolarized' 된 경우에는 위 미분 산란단면적은

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{n}_0)\right]_{\text{unpol}} = \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 k^4 a^6 \frac{(1+\cos^2\theta)}{2}$$

(여기서 $\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{n}_0$ 임)

와 같은 식으로 바뀌어짐을 보이고, 또 이 경우에 total scattering cross section을 구하라.

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학인	(인)
-------	------	----	----	------------	-----

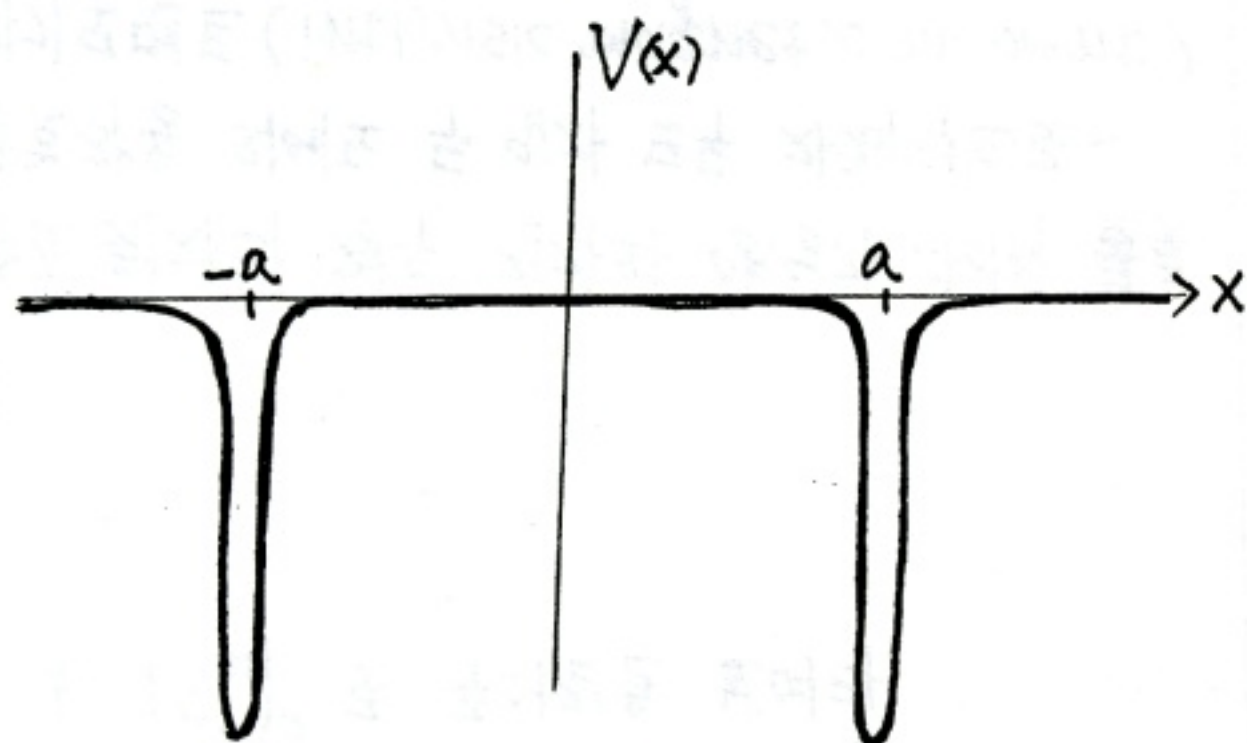
물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학

2005 . 01. 21 시행

1.

1차원에서 질량 m 인 비상대론적 입자가 아래 그림과 같은 (대칭형) 포텐셜의 영향 아래 있다고 할 때 양자역학적 기저상태에 대해 알아보려고 한다.



(가) 이 포텐셜을 근사적으로

$$\bar{V}(x) = -g [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$$

와 같은 형태로 표현한다고 할 때, 여기서 상수 g 는 주어진 포텐셜 $V(x)$ 와 어떻게 연관지을 수 있는가?

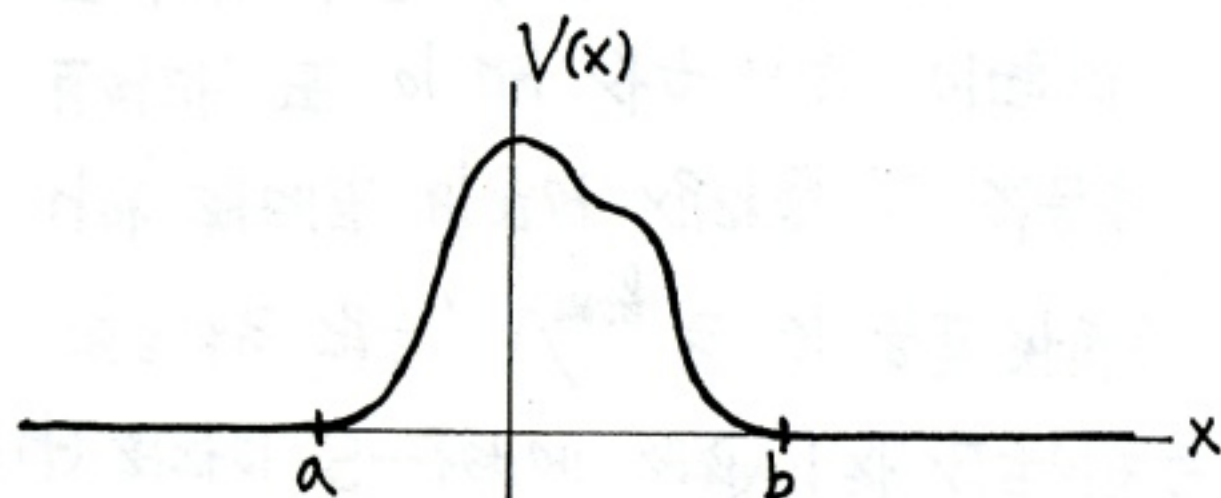
(나) 이 경우 기저상태에서 에너지 고유함수를 $\psi_0(x)$ 라고 하면 $\psi_0(x)$ 는 우함수(즉 $\psi_0(-x) = \psi_0(x)$)로 잡을 수 있다. 왜 그런가?

(다) (가)에서 잡은 포텐셜에 대해 $x > 0$ 인 영역에서 $\psi_0(x)$ 가 갖는 함수형을 x 가 a 보다 클 때와 작을 때로 나누어 써보아라.

(라) 기저상태의 에너지 값 E_0 는 상수 g 에 어떤 관계식으로 연결되는가? (해당식을 구체적 형태로 쓸 것).

2.

1차원에서 포텐셜이



와 같이 주어졌을 때, 질량 m 인 입자의 시간에 무관한 슈뢰딩거 방정식의 일반해는

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (x < a) \\ \psi_{ab}(x) & (a < x < b) \\ C e^{ikx} + D e^{-ikx} & (x > b) \end{cases}$$

($k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 이고, $a < x < b$ 영역에서의 함수 $\psi_{ab}(x)$ 는 포텐셜 형태에 따라 달라짐)

와 같은 형태로 쓸 수 있다. 여기서 A, B, C, D 는 복소수 값을 가질 수 있고, 이 중 두개만 자유 변수가 될 수 있다.

(가) 위 해에 대해 (1차원) probability current density $j_x = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x) - (\frac{d}{dx} \psi^*(x)) \psi(x)]$ 는 x 의 모든 영역에서 똑같은 값을 가져야만 한다. 왜 그런가?

(나) A, B, C, D 사이에

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

와 같은 관계식이 성립한다고 하고, (가)의 결과를 이용하면 $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ 는

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학인	(인)
-------	------	----	----	------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학

2005 . 01. 21 시행

([2.] 번 문제 계속)

unitary 행렬 (즉 $S^\dagger S = I$ 을 만족) 이 되어야 함을 증명하라.

(다) 쉬뢰딩거 방정식의 time reversal 불변성을 이용해서 S 는 동시에 symmetric matrix (즉 $S_{ij} = S_{ji}$) 가 됨을 보여라.

(라) S -행렬로부터 산란(scattering) 문제에 관한 모든 정보를 얻을 수 있다. 특히 왼쪽 또는 오른쪽에서 입사하는 입자의 산란 문제에서 transmission coefficient T 는 $|S_{21}|^2$ 로 주어짐을 보여라.

3.

수소 원자의 경우 전자와 양성자 사이의 쿨롱 상호작용 외에도 두 입자 모두 자체적으로 자기모멘트 (intrinsic magnetic moment) 를 갖고 있으므로 이에 따른 물리적 효과를 섭동이론 (perturbation theory) 의 관점에서 고려할 필요가 있다. 수소 원자의 S -상태 (즉 $l=0$ 인 상태) 에 제한시켜 생각할 때 이 자기적 상호작용에 의한 섭동효과는

$$H' = \frac{2}{\hbar^2} A \vec{S}^{(e)} \cdot \vec{S}^{(p)}$$

와 같은 유효 하밀토니안 (effective Hamiltonian) 을 통해 고려할 수 있음이 알려져 있다. 여기서 A 는 어떤 양의 상수이고 $\vec{S}^{(e)}, \vec{S}^{(p)}$ 는 각각 전자와 양성자의

스핀 연산자를 나타낸다. 또 양성자는 좌표 원점에 멈춰 있다고 생각하자.

(가) 위 유효 하밀토니안은 전자의 자기모멘트 $\vec{\mu}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{S}^{(e)}$ 와 양성자의 자기모멘트 $\vec{\mu}_p = \frac{ge}{2m_p} \vec{S}^{(p)}$ (여기서 $g \approx 5.58$ 는 양성자의 g -factor 임) 사이에 존재하는 포텐셜

$$V_{\text{mag}} = \frac{ge^2}{2m_e m_p} \left[\frac{3 \vec{S}^{(p)} \cdot \vec{r} \vec{S}^{(e)} \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{S}^{(p)} \cdot \vec{S}^{(e)}}{r^3} \right] + \frac{4\pi ge^2}{3m_e m_p} \vec{S}^{(p)} \cdot \vec{S}^{(e)} \delta^3(\vec{r})$$

에 연유한다. 주어진 포텐셜 V_{mag} 의 각 항들이 어떻게 해서 나타나는 지 간단히 설명해 보아라.

(나) 전자의 S -상태에 제한^{해서} 1차 섭동이론을 적용하는 경우, V_{mag} 는 위 유효 하밀토니안 형태로 바꾸어 생각할 수 있음을 보여라. 또 이 때 상수 A 는 어떻게 표시되는가? (힌트: 상수 A 는 전자가 좌표공간에서 갖는 에너지 고유함수를 $\psi(\vec{r})$ 이라고 하면 $|\psi(\vec{r}=0)|^2$ 에 비례하며, $\psi(\vec{r}=0)$ 의 값은 구하지 않아도 된다).

(다) 위 유효 하밀토니안 때문에 수소 원자의 준위에 (양성자의 자기모멘트에 의한 영향을 무시했을 때에 비해) 추가적 splitting 이 일어나게 된다. 구체적으로

소속대학원	물리학부	학번		성명		감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	--	----	--	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 양자역학

2005 . 01. 21 시행

([3] 번 문제 계속)

total-spin singlet 에 있을 때 total-spin triplet 에 있는 경우 보다 에너지가 $2A$ 만큼 낮은 값을 갖게 됨을 보여라. (※ 이것을 수소 원자의 hyperfine energy splitting 이라고 한다).

(라) total-spin 양자수 값에 따라 벌어진 두 에너지 준위 사이에 천이 (transition) 가 일어나면서 나온 빛의 파장을 관측한 결과 21 cm 가 나왔다고 하면, 이 때 hyperfine energy splitting 의 크기는?
(※ $h \approx 4.1 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$).

소속대학원	물리학부	학번	성명	감독교수 학 인	(인)
-------	------	----	----	-------------	-----

물리학부 석사과정 자격시험

과목명 : 통계역학

2005 . 01. 21 시행

1.

(가) 1차원 조화운동을 하는 떨개 (oscillator)의 에너지 준위는

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

처럼 표시된다. 이 떨개가 일정한 온도 T 로 열적 접촉을 하고 있을 때, 서로 독립적인 N 개의 떨개로 구성된 계의 분배함수 (partition function) $Z_1^{(N)}$ 과 평균에너지를 구하라.

(나) 3차원에서 조화운동을 하는 떨개 (oscillator)의 에너지 준위는

$$E_n = (n + \frac{3}{2}) \hbar \omega, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

와 같다. 여기서 양자수 n 에 대응하는 에너지 상태의 겹침상태수 (degeneracy) $g_3(n)$ 을 구하라.

(다) (나)의 계가 일정한 온도 T 로 열적 접촉을 하고 있을 때 이 계의 분배함수 Z_3 를

$Z_3 = \sum_n g_3(n) e^{-\beta E_n}$ 의 식을 이용하여 구하라. 여기서 $\beta = 1/T$ (Boltzmann 상수는 1로 놓음)이다.

(라) (나)와 (다)의 질문을 d 차원으로 일반화하는 경우 에너지 준위는

$$E_n = (n + \frac{d}{2}) \hbar \omega, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

이다. 이 때 겹침상태수 $g_d(n)$ 과 분배함수 Z_d 를 구하라.

(마) 이 분배함수 Z_d 와 1차원에서 d 개의 떨개로 구성된 계에서 구한 분배함수 $Z_1^{(d)}$ 를 비교하라.

2.

(가) 열역학 관계식을 이용하여 압력 p 는 Helmholtz 자유에너지 $F = U - TS$ 로부터

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

와 같은 식을 통해 얻을 수 있음을 보여라. [여기서 U 는 내부에너지, S 는 엔트로피, V 는 부피, T 는 절대온도를 나타냄].

(나) 빛알 (photon)은 전자기파를 양자화한 기본 입자로서 $E = \hbar \omega = c|\vec{p}|$, $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ 을 만족한다. (여기서 ω 와 $k = \omega/c$ 는 각각 빛알의 각진동수와 파동수이며, c 는 광속, $\vec{p}$ 는 운동량이다). 또 빛알의 j 번째 상태의 에너지와 각진동수를 E_j , ω_j 로 각각 표시하자. 빛알 기체들이 일정한 온도 T 를 유지하고 있는 부피 V 의 공간에 갇혀있을 때 빛알 기체의 분배함수 (partition function)를 구하라. [힌트: 빛알 통계에서는 각 상태에 들어가는 입자의 수에 제한이 없다.]

(다) 단위 체적당 내부에너지 u 는 온도의 네 제곱에 비례, 즉 $u = \sigma T^4$ 임을 유도하라. (여기서 σ 는 Stefan-Boltzmann 상수이다).

(라) 빛알 기체에 의해 공간의 벽면에 작용하는 압력은 $p_g = \frac{1}{3}u$ 와 같음을 보여라.

(마) 빛알 기체에 의한 압력과 단위 체적 속에 있는 1 mole의 고전적 이상기체의 압력 p_B 를 비교한다고 할 때, 두 압력이 같은 자리수 (order of magnitude)가 되는 온도를 구하라. ($\sigma \approx 7.5 \times 10^{-15} \text{ erg/cm}^3 \text{K}^4$ 을 이용할 것).