물리학과 대학원 자격시험 I

(양자 역학) 1981. 3. 7.

1. 질량 m 인 입자가 (위치는 $\vec{r}$) 다음과 같은 구대칭 (spherical symmetry) potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 \ , & r(=|\vec{r}|) \leq a \\ 0 \ , & r > a \end{cases}$$

내에서 운동하고 있다. 이 입자가 s-상태에 있을때

(a) 각 영역에서의 Schrödinger 방정식의 해를 구하라.

(b) 적어도 한개의 bound state를 형성하기 위한 V_0 의 최소치를 구하라.

참고 : spherical coordinate 에서

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

2. 한 one dimensional harmonic oscillator potential well 속에 있는 두개의 입자 사이에 attractive interaction 이 존재하는 系의 total Hamiltonian 이

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_2^2 + \lambda(x_1 - x_2)^2, \quad (\lambda > 0)$$

로 주어졌다. (x_j 는 입자의 위치, p_j 는 운동량 이다, $j = 1, 2$). Single harmonic oscillator 문제의 해는 안다고 생각하고 다음 질문에 답하라.

(a) 새로운 좌표 $\xi = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$, $\eta = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$ 들로 H를 표시하고, 이 전체 系의 energy eigenvalue 들을 구하라.

(b) 두개의 입자가, total spin 및 isospin state 는 symmetric 인, Fermion 들이라고 가정했을때의 이 系가 가질 수있는 total energy 준위들을 구하라. 또한 $\lambda = k$ 인 경우, first excited state 의 energy 값을 찾아라.

:Hint : single harmonic oscillator 에 대한 eigenfunction 은

$\varphi_n(y) \propto \exp(-\alpha y^2) H_n(\beta y)$ 로 표시되며 ,n 이 odd (even) number 이면 $H_n(\beta y)$ 는 y 에 대해 odd (even) function 이다.

3. spin $\frac{1}{2}$ 인 두 입자로 형성된 系에서, 이 두 입자는 서로 다른 장소에 고정되어 있고, 이들 사이에는 $V = A(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B S_{1z} S_{2z})$ 로 주어진 spin-spin interaction 만이 존재한다고 가정한다. 여기서 $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ 는 각각의 spin operator 이다. (unit $\hbar = 1$)

(a) 이 系가 가질 수 있는 $\vec{S}(=\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ 및 S_z ($\vec{S}$ 의 z축 성분)의 eigenstates $|s, m_s\rangle$ 들을 표기하라. 여기서 s, m_s 는 S^2, S_z 의 quantum number 이다.

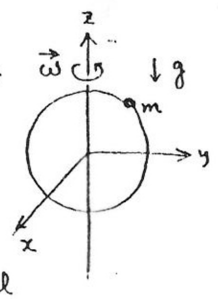
(b) $|s, m_s\rangle$ 가 Hamiltonian V 의 eigenstate 임을 보이고, 이 系의 energy eigenvalue 들을 구하라.

(c) Time $t = 0$ 인 시간에 두입자는 $m_{s_1} = \frac{1}{2}$, $m_{s_2} = -\frac{1}{2}$ 인 configuration 이었다. 어떤 time t 에서의 state function 을 시간의 함수로 구하고, $t = 0$ 일때와 동일한 configuration 이 되는 시간을 구하라.

물리학과 대학원 자격시험 I

(고전역학, 전자기학) 1981. 3. 7

1. 질량 m인 염주알(bead)이 반경 a인 원주(circular wire)상에서 마찰없이 움직이도록 되어있고, 이 원주는 그림과 같이 직경을 가로지르는 수직선(vertical diameter)주위로 일정한 각속도 $\vec{\omega}$로 회전하고 있다. 중력을 고려하고



(a) 이 염주알의 운동을 기술하는 Lagrangian과 운동방정식을 구하라.

(b) 염주알이 원주상에 가만히 있을수 있는 stationary point 들을 찾고 이들의 안정성(stability)을 논의하라.

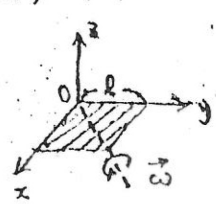
2. (a) 어떤 강체(rigid body)가 한 고정점 주위로 각속도 $\vec{\omega}$로 회전할때 각운동량 $\vec{L}$과 운동에너지 T는 $\vec{\omega}$와 다음과 같이 관련됨을 보이라.

$$L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j, \quad T = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \omega_i I_{ij}\,\omega_j$$

여기서 inertia tensor I_{ij}는 다음과 같이 정의된다.

$$I_{ij} = \int dm\,(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)$$

(b) 그림과 같이 질량이 m이고 변의 길이가 l인 정사각판이 x-y 평면에 놓여있다. 이 평면의 원점 O에 대한 inertia tensor를 구하라.



(c) 이 평면이 그림과 같이 대각선 주위로 일정한 크기의 각속도 $\vec{\omega}$를 갖고 회전하는 경우 각운동량과 운동에너지를 구하라.

3. 전기장 $\vec{E}$가 위치의 함수로

$$\vec{E}(\vec{r}) = q\,e^{-\alpha r}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

과 같이 주어졌다.

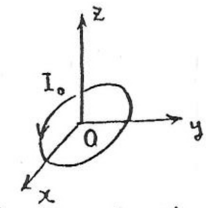
(a) $r=0$ 및 $r\neq 0$에서의 전하밀도를 구하라.

(b) 반경 r내에서의 총전하(total charge)를 구하고 $r\to\infty$ 때에 어떻게 되는가를 논하라.

4. (a) 시간에 따라 변하지 않는 magnetic dipole $\vec{\mu}$가 원점에 있다면 그에 대응하는 vector potential은

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}$$

처럼 주어진다. 일정한 전류 I_0가 흐르는 반경 a인 circular loop이 그림과 같이 원점을 중심으로해서 놓여있다고 할때 $|\vec{r}| \gg a$인 점 $\vec{r}$에서의 자기장 $\vec{B}_0(\vec{r})$을 구하라.

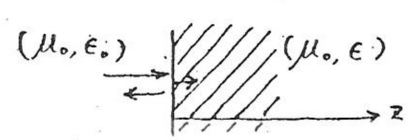


(b) 위의 current loop에 시간에 의존하는 전류

$$I = I_0\,\mathrm{Re}[e^{-i\omega t}] = I_0\cos\omega t$$

가 흐를때 여기에 대응하는 vector potential이 (a)에서 주어진 형태로 표시된다고 하면 이 vector potential이 Coulomb gauge ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$)를 만족함을 보이라. 그리고 이때에 $|\vec{r}|\gg a$, $\frac{\omega}{c}|\vec{r}| \ll 1$인 영역에서 전기장 $\vec{E}(\vec{r},t)$의 값을 구하라.

5. 진공(μ_0, ϵ_0)중을 진행하던 평면파(plane wave)가 진행방향에 수직으로 놓인 전매질(μ_0, ϵ)에 부딪혀 반사 및 투과를 하는 경우를 생각하자. [여기서 μ_0는 진공및 전매질에서의 permeability(투자율)이며 ϵ_0, ϵ는 각각 진공과 전매질에서의 permittivity(유전율)이다]



(a) Maxwell 방정식을 이용하여 이 경계면에 인접한 양편 영역에서 전기장과 자기장의 접선방향성분 및 법선방향성분들이 만족해야 할 조건들을 구하라.

(b) 경계면에서의 입사파의 전기장및 자기장 성분을

$$\vec{E}_i = E_0\,\hat{x}, \quad \vec{H}_i = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\,E_0\,\hat{y}$$

라 했을때 이 경계면에서의 반사파및 투과파의 전기장및 자기장 성분들을 구하라. (단 surface current는 없다.)

물리학과 대학원 자격시험 I

(고전역학, 전자기학 계속) 1981. 3. 7

(c) 이때 입사파가 가진 power의 $\frac{1}{4}$이 투과하기 위해서 매질의 유전율 ϵ/ϵ_0가 가져야 할 값을 구하라.

〈참고〉

= Maxwell 방정식 =

MKS:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

CGS:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

= Vector identities =

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

= $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ in spherical coordinates =

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi$$

물리학과 대학원 자격시험 I

(통계역학) 1981. 3. 7.

4. 어떤 결정체 내에 있는 원자핵들의 spin이 1이다. 양자론에 의하면 각각의 핵은 양자수 m에 의해 표시되는 3개의 양자상태 (즉 $m = 1, 0, -1$)의 어느 하나에 있게 된다. 각각의 원자핵이 $m = 1$, $m = -1$ 인때 같은 energy $E = \varepsilon$을 갖고, $m = 0$ 인때 $E = 0$를 갖는다. (N_0를 Avogadro number로 놓을것.)

(a) 이 원자핵들이 절대온도 T에서 열평형을 이루고 있다고 할때, 하나의 원자핵이 상태 $m = 1, -1, 0$에 있을 확률은 각각 얼마인가?

(b) 이 고체의 molar internal energy에 대한 nuclear contribution을 절대온도 T의 함수로 나타내라.

(c) 이 고체의 molar entropy에 대한 nuclear contribution을 계산하라.

(d) 이 고체의 비열에 대한 nuclear contribution의 온도 의존성을 보이는 graph의 모양을 그리라. (이 비열의 온도 의존성을 계산하고 T가 매우 큰때 어떻게 되는가를 보이라.)

5. 격자 기체 모형 (Lattice gas model)은 기체를 담은 용기를, M개의 site를 가진 lattice로 보고, $N (< M)$개의 기체 분자가 격자점을 하나씩만 점유할 수 있다고 약정한 모델이다. 고전 통계역학에서는 운동량 공간과 좌표공간 (configuration space)이 완전히 분리되므로 아래에서는 좌표 공간 만을 생각한다. 다음 물음에 답하여라.

(a) 격자기체가 이상기체 (상호작용이 없음)라 생각하고 좌표공간 (configurational) 엔트로피를 구하라. 엔트로피는 미시적 상태의 갯수를 Ω라 하면 $S = k \ln \Omega$로 주어진다. 단 k는 Boltzmann 상수이다.

(b) 임의의 한 격자 점이 분자에 의하여 점유될 확률 P_1, 비어있을 확률 P_0을 구하고, 한 격자점에 대응하는 entropy

$$S = -k[P_0 \ln P_0 + P_1 \ln P_1]$$

를 M과 N 만으로 표시하여 보라.

(c) $M \gg N \gg 1$ 일때, 위의 격자당 엔트로피 (b에서 구한 값)에 M 배한 값이 (a)에서 구한 전체 계의 entropy와 같음을 보이고, 이와 같은 근사가 성립할 수 있는 물리적 이유를 설명하라. 단 M과 N에 Stirling 근사식

$$\ln(L!) \cong L \ln L - L$$

을 적용할 수 있다.

(d) 한 격자가 차지하는 체적을 v_0로 하면 기체의 평균 밀도 $\bar{\rho}$는

$$\bar{\rho} = \frac{1}{v_0}(1 \times P_1 + 0 \times P_0) = \frac{P_1}{v_0}$$

이라 할 수 있다. $\bar{\rho}$의 standard deviation (density fluctuation), $\sqrt{\overline{(\Delta\rho)^2}} = \sqrt{\overline{(\rho - \bar{\rho})^2}}$ 를 $\bar{\rho}$와 $\rho_{max} \left(\equiv \frac{1}{v}\right)$의 함수로 구하라.