

1. 선운동량 $\vec{p}$ 를 갖는 양자 beam 이
정지상태의 다른 양자와 충돌하여 양자-반양자
pair 를 생성하는 반응

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

을 생각하자. (단 양자 및 반양자의 질량은
동일한 값 m 으로 주어지고 $C(\text{광속}) = 1$
이라고 놓아도 좋다).

- (a) 이 충돌 현상에 대한 4-momentum 의
보존칙을 Laboratory frame 과 center
of mass frame 에서 각각 써라.

- (b) 이때 T_{th} , 즉 이 반응이 일어나기
위해서 incident 양자 beam 이
Laboratory frame 에서 가져야 하는 최소의
운동에너지를 구하라.

2. (a) 전자장 $\vec{E}, \vec{B}$ 에서 움직이는 질량 m ,
전하 q 를 갖는 입자에 대한
Lagrangian 은

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q \phi(x) + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(x)$$

$$(\text{단 } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A})$$

와 같이 쓸 수 있다. 위의 Lagrangian
에서 나오는 입자의 운동방정식을 유도
함으로써 이를 증명하라.

- (b) 이때 Hamiltonian 을 구하라.

물리학과 대학원 자격시험 I

(전자기학)

1981, 8, 22

3. 반경이 각각 a, b ($b > a$) 인 두개의 infinite coaxial conducting cylinder (무한 동축 도체 원주)들을 생각하자.

(a) 안쪽과 바깥 원주에 단위길이당 각각 $\sigma, -\sigma$ 만큼의 전하가 주어졌을때 모든 공간에서의 전위 (electrostatic potential) 를 구하라.

(b) 이 系の 단위길이당 전기용량 C (capacitance) 를 구하라.

(c) 만약 안쪽과 바깥쪽 원주표면으로 방향이 서로 반대인 전류 I 가 흐른다고 하자. 이때 유도되는 자장을 모든 공간에서 구하라.

(d) (c) 의 경우에 단위길이당 자체유도 L (: inductance) 을 구하라.

4. 물질내의 전자를 고전적 입자라고 생각하고 이것이 탄성력 $-m\omega_p^2 \vec{r}$, 저항력 $-m\gamma \dot{\vec{r}}$ 를 받으며 원자에 속박되어 있다고 하자. (단 $\vec{r}$ 은 원자중심에서 부터 전자까지의 위치 vector 이고 m 은 전자의 질량임). 이 系에 진동수 ω 인 외부 전기장 $\vec{E}_0 e^{i\omega t}$ 가 가해지고, 단위 체적당 전자수를 n 이라고 할때

(a) 이 전자들에 의한 polarization vector $\vec{P}$ 를 구하라.

(b) 이 물질의 index of refraction 을 $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ 로 놓을때,

$\epsilon(\omega)$ 와 $\gamma(\omega)$ 가 만족하는 관계식들을 적어라. (여기서 $\epsilon(\omega), \gamma(\omega)$ 는 실함수 이고 $(n(\omega))^2 = \epsilon(\omega)/\epsilon_0$, $\epsilon(\omega)$: dielectric constant).

(c) 이 물질을 통과하는 전자파 $\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ 의 진폭이 e^{-1} 만큼 감소할때까지 통과하는 거리 (penetration depth) z_0 를 구하라.

5. 진동수 ω 인 전자파가 전도율 (conductivity) σ , 유전율 (dielectric constant) ϵ , 투자율 (magnetic permeability) μ 인 매질을 진행한다고 하자.

(a) 이 전자파가 만족하는 Maxwell 방정식을 $\vec{E}$ 와 $\vec{H}$ 를 가지고 써 보아라.

(b) 이 전자파가 x 방향으로 진행하는 평면파에 해당한다고 할때 $\vec{E}$ 및 $\vec{H}$ 의 각 성분들이 만족하는 방정식은?

(c) (b) 에 나온 방정식의 해를 구하라.

물리학과 대학원 자력시험 I.

(양자역학)

1981. 8. 22

1. 일차원 단진자의 Hamiltonian 은 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ 로 표시된다. 다음 질문에 답하라.

(a) 운동량 operator p 는 좌표공간에서

$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ 로 표시되는데 그 이유를 간단히 설명하라. 이 경우 operator p 의 기대치 (expectation value) 는 항상 실수값 (real value) 을 갖는가?

(b) operator

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

및 그의 Hermitian conjugate $A^\dagger$ 를 이용하여 Hamiltonian 을 표시하고 가능한 energy eigenvalue 들을 구하라. 단 operator $N \equiv A^\dagger A$ 의 eigenvalue n 은 positive integer 임을 이용하라 (증명不要).

(c) 이 단진자가 q 인 전하량을 가지고 균일한 전장 E_0 (x 방향) 속에 있을 때 energy level 들은?

2.

(a) 시험함수 (trial function) ψ 가 eigenvalue E 를 갖는 어떤 에너지 고유함수 (energy eigenfunction) ψ_E 와 적은 양 만큼 달라서 $\psi = \psi_E + \epsilon \psi_1$ 으로 표시 된다고 하자. 여기서 ψ_E 와 ψ_1 은 규격화 (normalized) 되어 있고 ϵ (실수) $\ll 1$ 이다. ψ 를 가지고 주한 energy 기대치,

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \text{ 와 } E \text{ 의 차이는 } \epsilon^2 \text{ 의 order 정도임을 보이라.}$$

(b) 질량 m 인 입자가 potential

$$V(\vec{r}) = -V_0 \exp(-r/a),$$

$$(r = |\vec{r}|, V_0 > 0)$$

에 속박되어 있다. 여기서

$$\frac{\hbar^2}{m} (V_0/a^2)^{-1} = \frac{3}{4} \text{ 라고 하자.}$$

시험함수를 $\psi_a(\vec{r}) = N e^{-a r}$ 로 잡고 변분법 (variational method) 을 써서 얻을 수 있는 가장 좋은 최저 에너지 고유값 및 그에 대응하는 파동함수를 구하라.

3. 3차원에서 어떤 양자역학의 입자가 시간에 따라 변하지 않는 포텐셜 $V(\vec{r})$ 내에서 움직이고 있을 때의 Hamiltonian operator 는

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}),$$

$$(\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \vec{r} = (x_1, x_2, x_3))$$

로 쓸수있다. 여기서 $(\vec{p}, \vec{r})$ 는 Schrödinger operator 들이다.

(a) Heisenberg picture 에서의 운동량 및 위치 operator ($\vec{p}_H(t), \vec{r}_H(t)$) 는 어떻게 주어지는가? 그리고 $\vec{p}_H(t)$ 와 $\vec{r}_H(t)$ 의 각 성분들 ($p_{H,i}(t), x_{H,i}(t)$)처럼 표시할것) 사이에는 어떠한 commutation relation 들이 성립하는가?

(b) 이들 Heisenberg picture operator 들은

$$\frac{d x_{H,i}(t)}{dt} = \frac{p_{H,i}(t)}{m}, \quad \frac{d p_{H,i}(t)}{dt} = - \frac{\partial V(\vec{r}_H(t))}{\partial x_{H,i}(t)}$$

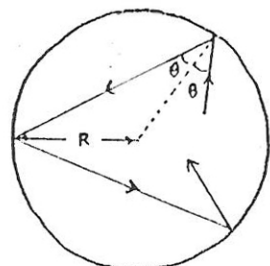
를 만족함을 보이라

(c) 포텐셜 $V(\vec{r})$ 를 interaction term 으로 보고 interaction picture 에서의 운동량 및 위치 operator ($\vec{p}_I(t), \vec{r}_I(t)$) 들은 어떻게 주어지는가?

(d) $(\vec{p}_I(t), \vec{r}_I(t))$ 가 만족하는 운동 방정식은?

4

그림과 같이 반경 R 인 공(球) 안에 들어 있는 이상기체를 고전적으로 생각하자.



이 기체는 질점(point particle)들로 이루어져 있고, 공의 안쪽 벽면에서 탄성 충돌을 한다고 가정하여 다음 질문에 답하라.

- (a) 질량 m , 속도 v 인 하나의 비 상대론적 입자가 단위 시간에 벽에 수직 방향으로 주는 운동량은 얼마인가?
- (b) (a)에서 얻은 결과를 써서 내부 에너지 U , 압력 P , 체적 V 간에는 $PV = 2U/3$ 인 관계가 있음을 보이라.
- (c) 각 진동수가 ω 인 전자기파를 에너지 $\hbar\omega$ 운동량의 크기 $\hbar\omega/c$ 인 입자 즉 광자(photon)로 생각하자. 이들 광자로 이루어진 계에 대해서 앞의 논의를 적용하면 $PV = U/3$ 인 관계가 성립함을 보이라.
- (d) P, U, V, T 간에는 일반적으로

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \text{ 인 관계가 있다.}$$

photon gas 에 대해서 (c) 및 위 관계식을 써서 photon system 의 에너지 밀도, $u = U/V$ 는 절대온도의 4승 (i.e. T^4) 에 비례 함을 보이라.

5.

Heisenberg model Hamiltonian

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - g\mu_B H \sum_i S_{iz}$$

생각하자. ($\langle ij \rangle$ 는 nearest neighbor 을 뜻함.) J 는 exchange 상수이고, $\vec{S}_i, \vec{S}_j$ 는 각각 i, j 번째 lattice site 있는 스핀들이며, $J > 0$ 일때 이 Hamiltonian 은 강磁性体系를 기술한다. N 개의 lattice site 가 존재하고, 각 스핀의 nearest neighbor 의 갯수가 z 일때, 위의 Hamiltonian 에 평균장 근사 이론(mean field approximation)을 적용하면, 내부 에너지 E 는

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} \langle S_{iz} \rangle \langle S_{jz} \rangle - g\mu_B H \sum_i \langle S_{iz} \rangle$$

로 주어진다.

여기서 스핀이 $\frac{1}{2}$ 인 계에 대한 order parameter 를 $\sigma = \frac{2}{N} \langle S_{iz} \rangle$ 로 잡으면,

$$\frac{1+\sigma}{2} = \frac{N_\uparrow}{N}, \quad \frac{1-\sigma}{2} = \frac{N_\downarrow}{N} \text{ 이 될것이다.}$$

여기서 $N_\uparrow, N_\downarrow$ 는 각각 spin up, spin down 의 평균갯수이다.

위의 평균장 근사이론을 가정했을때,

- (a) 이系の 엔트로피 S 를 order parameter σ 의 함수로 표시하라.
- (b) 이系の Helmholtz free energy 를 σ 의 함수로 표시하라.
- (c) $H_0 = 0$ 일때 상전이 온도(phase transition temperature)를 구하라.