

Maxwell 방정식

MKS ; $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

CGS ; $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

In cylindrical coordinates

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

In spherical coordinates

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

$\nabla^2 [r^l P_l(\cos \theta)] = 0$

$\nabla^2 [r^{-l-1} P_l(\cos \theta)] = 0$

1. z축 방향으로 향하는 일정한 크기 E를 갖는 전장에 그림과 같이 반경 a인 유전체구 (유전율 ϵ)가 놓여 있다.



- i) 유전체 구의 내부와 외부에서 포텐셜의 일반적인 해가 미지수인 형태로 주어진다.
- ii) $r=a$ 및 $r=\infty$ 에서의 경계조건을 적고 이를 이용하여 구의 내부 및 외부에서의 포텐셜 ϕ_{in}, ϕ_{out} 을 구하라.
- iii) $\epsilon > 1$ 인 경우 구 내부의 전장을 구하고 외부 전장과 비교 논하라.
- iv) 그리고 Polarization 때문에 유도되는 표면 전하 밀도가 $\sigma_f = 3 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) E_0 \cos \theta$ 임을 보여라 (즉 MKS unit).

2. i) 그림과 같이 원형도선 (반경 a)에 전류 I가 흐를 때 중심축상 (z축)의 점 P에서의 자기장 $\vec{B}(z)$ 를 구하라.

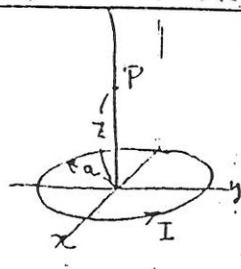


그림 1

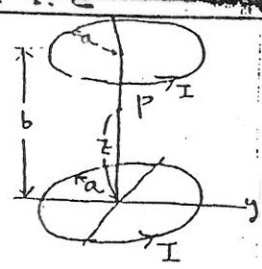
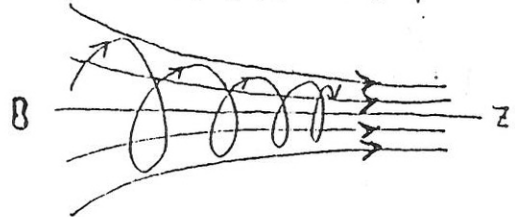


그림 2

- ii) 그림 2와 같이 두개의 원형도선으로 구성된 Helmholtz coil이 있을 때 P점에서의 자기장 $\vec{B}(z)$ 를 구하라.
- iii) 이 두 coil 사이에서 자기장 $\vec{B}(z)$ 가 최대한 균일하기 위한 a와 b의 관계를 구하라.

3. 그림과 같이 균속에 대해서 대칭성이 있는 자기장 $\vec{B}$ 가 z축 방향으로 향하고 있으며, 그 크기가 천천히 변한다. 이 자장 안에서 하전 입자 q가 초기속도 $\vec{v}_0 = -v_{10} \hat{\phi} + v_{z0} \hat{z}$ 로 z축 주위를 움직이고 있을 때



- i) Maxwell 방정식으로 부터 자기장 $\vec{B}$ 의 radial 성분 B_r 은 B_z 의 함수로 풀이하라 (z축 부근에서는 $B_z(r, z) \approx B_z(z)$)
- ii) z 방향에 대한 하전입자의 운동방정식을 구하라.
- iii) 주계무동하는 계의 action integral $J = \int \vec{p} \cdot d\vec{q}$ 가 constant of motion임을 이용하여 하전입자의 path가 꺾은 자속 또는 magnetic moment가 constant임을 보여라 (자기장 $\vec{B}$ 가 천천히 변하므로 하전

입자의 path가 거의 circular
하다고 보아도 무방하다).

- iii) 이 하진입자가 가지는 전 운동량이
보존량을 설명하고 위와 결과를 이용하여
이 하진입자-매질의 하진입자-운동
기술하라.

4. Laboratory frame에서 정지해 있는
질량 m_1 인 입자에, 정지질량 m_2 인
입자가 상대론적 속도 $\vec{u}$ 로 입사하여
충돌하는 경우를 생각하라.

i) 4-vector를 $X_\mu = (\vec{X}, X_4 = ict)$ 와
같이 표현할 때 두 입자의 4-momentum
을 쓰시오 (Laboratory frame에서).

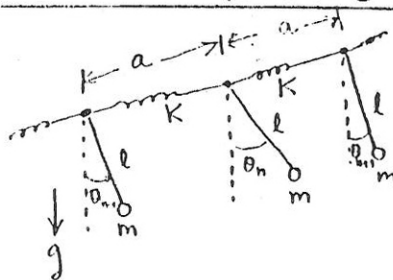
ii) Center of Mass frame은 두 입자의
3-momentum이 크기가 같고 방향이
반대인 frame이다. 이 C.M frame
에서의 total energy를 구하시오.

iii) 위에서 두 입자가 같은 입자(
proton)일 때 ($m_p = m_p$)

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

반응이 일어나기 위하여 필요한
입사입자의 threshold 에너지로 구하라

5. 그림과 같은 중력장에서의 torsion-
coupled pendulum을 생각하라.
각 pendulum의 운동은 방첩중 매
수직인 면에 한정되어 있고 spring
constant K 인 torsion spring은
비틀림 각도에 비례한 복원력만을
준다. (Pendulum 간의 거리 a 는 일정하고,
pendulum은 방첩 중 매에 고정되어 있으므로
방첩 중 매 pendulum이 움직이는 각도가
같은 각도로 비틀린다.)



i) 이계의 운동에너지와 포텐셜
에너지를 θ_n ($n=1, 2, \dots, N$)을
generalized coordinate로 하여
써 보아라 (periodic boundary condi-
tion을 적용하면 $\theta_{N+1} = \theta_1$ 또는 $\theta_N = \theta_0$)

ii) θ_n 이 n 의 함수로 서서히 변한다면
 $\theta_n = \theta(na)$ 로 m 에 $\theta(x)$ 를
field로 생각할 수 있을 것이다. 이러한
continuum limit에서의 운동방정식이
취하는 모양이 Sine-Gordon equation
형태

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

로 등을 보여라

iii) ii)와 같은 continuum limit에서의
Lagrangian을 쓰고 이로부터
운동방정식이 위의 결과와 같음을
보여라.

1) 질량 m 의 입자가 마찰 없는 circular track 내에 속박되어 운동하고 있다. 이 circular track의 반경을 R 이고 수평면에 놓여 있다고 하자.

i) 이 입자의 Schrödinger 방정식을 세우라

ii) Energy eigen value 와 eigen state 를 구하라.

iii) 이 계의 Hamiltonian 과 Commute 하는 물리량들을 찾고 degeneracy 를 논의하라.

2) 외부자장 $\vec{B}$ 를 걸어줄 때 magnetic moment $\vec{\mu}$ 를 갖는 입자의 interaction Hamiltonian 은 $H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ 로 주어진다. Spin 이외의 degree of freedom은 없다고 하고 다음 질문에 답하여라.

i) 두개의 구별 가능한 spin $1/2$ 입자의 magnetic moment 를 $\mu_1 \vec{\sigma}_1$ 및 $\mu_2 \vec{\sigma}_2$ 라고 하자. 여기서 $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ 는 입자 1 과 2 의 Pauli matrix 들이다 ($\vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$)

Spin-spin 상호작용은 $J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ 가 됨을 보여라.

ii) 위 문제를 참고하여 두개의 구별 가능한 spin $1/2$ 입자가 균일한 자장 $\vec{B}$ 내에 있을 때 interaction 에너지 준위를 μ_1, μ_2 및 J 로 표시하라.

iii) 위의 두 입자가 identical particle 일 때 에너지 고유 함수와 에너지 준위를 구하라.

3) Schrödinger 방정식 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$ 에서 V 가 상수 일 때는 ψ 의 space part 는 $e^{\pm i k x}$ 로 주어진다. $V(x)$ 가 상수가 아닐 때 $k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))}$ 로 표시하고

i) $\psi(x) \approx e^{i u(x)}$ 인 꼴의 해답을 구할 때 $u(x)$ 가 만족하는 방정식을 유도하라.

ii) W. K. B 근사법을 쓸 수 있을 때 $|\frac{dP}{dx}| \lambda \ll |P|$ 인 조건을 만족하여야 함과 $\psi(x)$ 의 first approximation 이

$$\psi_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{\pm i \int^x k(x) dx}$$

임을 보여라

iii) classical turning point 에서 위의 조건이 만족되는가? 여기에 대하여 어떻게 취급하는가 약속하라.

4. 체적 V 인 용기 내에 있는 N 개의 질량 m 인 비상대론적 Boson 의 이상기체를 생각하자. 이 계의 에너지는 $E = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$

$$(\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = N, n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, \dots)$$

으로 주어지므로 대분배함수 (grand partition function) 는 화학 potential 을 μ 시라 할 때

$$\begin{aligned} \Xi &= \prod_{\mathbf{k}} \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} \exp[\beta(\mu - \epsilon_{\mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}}] \\ &= \prod_{\mathbf{k}} [1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_{\mathbf{k}})}]^{-1} \end{aligned}$$

로 주어질 것이다. 다음 물음에 답하라.

(i) 이 계의 number density $\rho = N/V$ 를 온도 T 및 화학 potential μ 로 표시하는 식을 에너지의 적분형으로 써 보시오.

(ii) ρ 는 고정시키고 μ 를 온도 T 의 함수로 생각할 때 고온에서 $\rho = \exp(\beta\mu)$ 에 대한 근사식을 (i)로부터 구하시오

$$(\times \int_0^{\infty} dx x^{1/2} \exp(-x) = \sqrt{\pi}/2)$$

(iii) $\rho = e^{\beta\mu}$ 의 온도의 함수로서의 모양을 모든 온도 범위에서 정성적으로 그려보고 그 함수 모양에 대한 간단한 물리적 해석을 부과하시오. (ρ 는 고정시키고 $V \rightarrow \infty$ 극한을 취한 상에서 논의 할 것)

5. 질량 m , spin moment μ_B 인 비상대론적 자유 전자가 균일한 자장 B 에 있을 때 diamagnetic 효과를 무시하면 해밀토니안은 $H = p^2/2m - \mu_B \sigma \cdot B$ 이다. σ 는 Pauli 스핀 연산자. 이러한 전자 N 개가 체적 V 에 들어 있는 계의 에너지는 상호작용을 무시하면

$$E = \sum_{\mathbf{k}, s} (\epsilon_{\mathbf{k}} - s \mu_B B) n_{\mathbf{k}, s}$$

$$(\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m, s = \pm 1, \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} = N, n_{\mathbf{k}, s} = 0, 1)$$

$$\Xi = \sum_{\{n_{\mathbf{k}, s}\}} \prod_{\mathbf{k}, s} \exp[\beta(\mu + s \mu_B B - \epsilon_{\mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}, s}]$$

$$= \prod_{\mathbf{k}} (1 + e^{\beta(\mu + \mu_B B - \epsilon_{\mathbf{k}})}) (1 + e^{\beta(\mu - \mu_B B - \epsilon_{\mathbf{k}})})$$

(계속)

1982. 3. 6

$$= \left[\Xi_0(\mu + \mu_B B) \Xi_0(\mu - \mu_B B) \right]^{1/2}$$

 $\rho = N/V$ 의 함수로 주시오.

로 주어진다. 여기서 $\Xi_0(\mu)$ 는 외부 자장이 없을 때의 대 분배함수이고 μ 는 화학 potential 이다. 다음 물음에 답하시오.

(i) 자기화 (magnetization) M 은 N_+ 와 N_- 물 각각 spin 이 up 과 down 인 전자의 개수라 할때 $M = \mu_B \langle N_+ - N_- \rangle$ 로 정의된다. $\langle \dots \rangle$ 는 ensemble average이다. M 과 thermodynamic potential $\Omega \equiv -k_B T \ln \Xi$ 와의 관계식을 유도하시오.

(ii) zero-field Pauli susceptibility 는 $\chi_0 = \nu^{-1} \left. \frac{dM}{dB} \right|_{B=0}$ 로 주어진다. (i)로부터

$$\chi_0 = \nu^{-1} \mu_B^2 \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T, V, B=0}$$

임을 유도하시오.

(iii) (ii)의 결과로부터 $T=0$

에서의 χ_0 를 number density