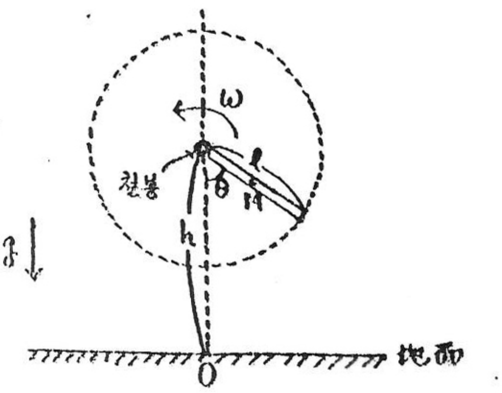
물리학과 대학원 자격시험 I

  1984.9.8

(고전역학 및 전자기)

[1] 체조선수의 철봉운동을 그림과 같이 질량이 M, 길이가 l 인 균일한 강체 (rigid body)가 地面에서 높이 h에 있는 철봉에 매달려 일정한 각속도 ω로 회전하고 있는 운동으로 기술하자. 선수의 착지(着地)는 이 강체의 질량중심이 地面



에 도달할 때라고 가정하자.(즉 강체가 지면을 자유로이 뚫고 들어갈 수 있다고 생각한다). 중력가속도는 g 이고 모든 마찰력은 무시하라.

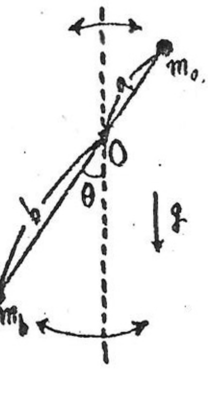
(가) 철봉을 지나는 연직선과 강체사이의 각도가 θ 일때 (그림참조) 선수가 철봉에서 손을 놓는다면 이 선수의 질량중심이 도달할 수 있는 최고높이 h_m은 얼마인가? (단 $0 \le \theta \le \pi$)

(나) 최고 높이 h_m 에서 着地 하기 까지의 체공시간을 최대로 만들기 위하여 선수는 θ가 얼마일때 철봉에서 손을 놓아야 하느냐? 단 ω가 $\sqrt{\frac{2g}{l}}$ 보다 작을 때와 클때로 구분하여 이 θ를 구하여라.

(다) 만약 선수의 각속도가 $\omega = 2\sqrt{\frac{2g}{l}}$ 로 주어질 때 문제 (나)에서 구한 θ (즉 문제 (나)에 정의한 체공시간을 최대로 하는 角)에서 선수가 철봉에서 손을 놓았을때 최고높이 h_m 에서 着地할 때까지의 체공시간 t_m을 구하라. 또 이 경우에 대하여 着地點을 구하라.

(라) 문제 (다)의 경우에 선수가 철봉에서 손을 놓은후 着地 할때까지 몇 회전을 하게 되는가?

[2] 그림과 같이 질량이 m_a 와 m_b 인 두 질점이 질량을 무시할 수 있는 막대 (강체로 생각할것)로 연결된 진자로 생각하자. 이 진자는 한 연직면내에서 고정점 "O"를 중심으로 마찰없이 자유로이 진동하고 있다. "O"점에서 두질점 m_a 및 m_b 까지의 거리는 각각 a 및 b 이고 (단 $m_a a \ne m_b b$)



중력가속도는 g 이다.
"O"점을 지나는 연직선과 막대가 이루는 각을 θ라 하고 아래 물음에 답하라.

(가) 이 진자에 대해 Lagrangian을 쓰고 이로부터 운동방정식을 구하라.

(나) 진자가 소폭진동 (즉 $\theta \approx 0$)을 할때 그 진동수 (frequency)를 구하라.

(다) 일반적인 경우에 진자가 $|\theta| \le \theta_{max}$

내에서 진동한다고 할때 진자의 주기 T를 θ 에 대한 적분형태로 표시하라. (단 $\theta_{max} < \pi$).

(라) 이 진자가 진동대신에 "O"점 주위를 계속 회전하기 위하여는 $\theta=0$ 에서 최소한 얼마이상의 각속도를 가져야 하는가?

$\boxed{3}$ 무한 도체판 (conducting plane) 이 수평으로 놓여있다. 이 위에 균일한 질량 밀도 ρ 를 갖는 금속원판을 놓고 이 둘을 서서히 대전시킨 경우 전하밀도 σ 가 얼마인 경우에 금속원판이 무한 도체면으로 부터 떠 오르기 시작하겠는가? 중력가속도는 무한도체면과 수직으로 작용하고 크기는 g 이다.

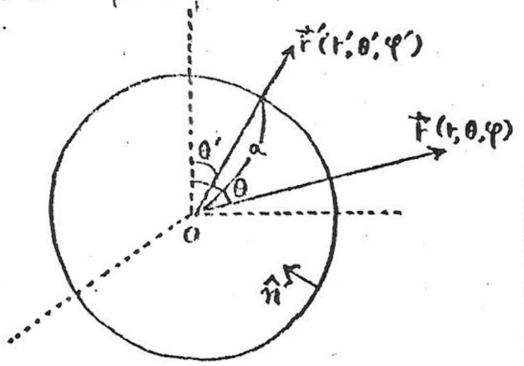
$\boxed{4}$ 다음 정전기 경계치 문제에 관한 물음에 답하라.

(가) 정전기 경계치 문제에서 Dirichlet 경계조건과 Neumann 경계조건은 각각 무엇을 말하는가?

(나) 아래 그림과 같이 반경이 a인 전도체구 (conducting sphere)의 표면에 정전 포텐셜 $V(\vec{r}')$ 이 주어졌을때 구 외부에서의 포텐셜 $V(\vec{r})$은

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\oint_{r'=a} V(\vec{r}')\,\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n'}\,dS'$$

로 됨을 보여라. 여기서 $G_D(\vec{r},\vec{r}')$ 은 구 외부에서의 Dirichlet Green's function 이고 $\hat{n}'$ 은 구표면에서 구 중심으로 향하는 단위 vector 이다.



(다) 주어진 구전도체 바깥에서 Dirichlet Green's function $G_D(\vec{r},\vec{r}')$ 는 어떻게 주어지는가?

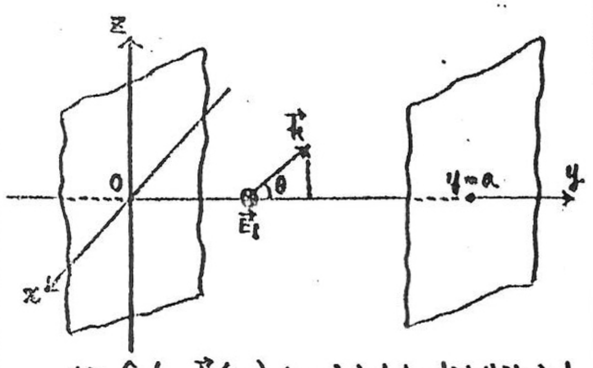
(라) 구 표면에서의 포텐셜이 $V(\vec{r}') = V_0 \cos\theta'$ (V_0는 상수) 로 주어졌을때 구 외부에서의 포텐셜 $V(\vec{r})$과 구표면에서의 표면전하밀도 (surface charge density) σ 를 구하라. (단 Green's function method 이외의 방법을 사용해도 좋다).

$\boxed{5}$ 그림과 같이 xz 면과 평행인 두 무한 완전도체 평면판이 $y=0$ 및 $y=a$ 에 위치하고 있다. 이 두 평면판사이에 전기장이

$$\vec{E}_i = E_0\,\hat{x}\,e^{i(ky\cos\theta + kz\sin\theta - \omega t)}$$

로 표시되는 전자기파가 입사한다고 할때 (그림참조) 완전도체에 의한 반사파를 고려하여 아래 물음에 답하라.

(다음 페이지로)



※ $\hat{k}\,(=\vec{k}/|\vec{k}|)$ 는 입사파의 진행방향이며 yz 面 내에서 y축과 각 θ 를 이룬다. 그리고 전기장 $\vec{E}_i$ 는 $\hat{x}$ 방향으로 편극 되어 있다.

(가) $y=0$ 및 $y=a$ 에서의 경계조건을 고려하여 두 평면판 사이에서의 전기장 $\vec{E}$ 를 $\lambda_y = \dfrac{2\pi}{k\cos\theta}$ 및 $\lambda_z = \dfrac{2\pi}{k\sin\theta}$ 를 써서 표시하고 경계조건을 만족하기 위해서 λ_y 는 어떤 제한이 주어지는지 분명히 하라.

(나) 두 평면판 사이에서의 자기장 $\vec{B}$ 를 구하라.

(다) 시간평균에너지밀도 (time-averaged energy density) $\overline{u} = \frac{1}{16\pi} \mathrm{Re}[\vec{E}^{*}\cdot\vec{D} + \vec{B}^{*}\cdot\vec{H}]$ 와 Poynting vector 의 $\hat{z}$ 방향 성분의 시간 평균값 $\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}[\vec{E}^{*}\times\vec{H}]_z$ 를 구하라.

(라) 문제 (다)의 결과를 이용하여 에너지가 전달되는 group velocity 는 $v_g = c\sin\theta$ 로 됨을 보여라.

※ Maxwell equations 은

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho\,, \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

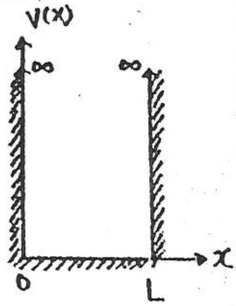
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\,, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

라고 주어진다.

물리학과 대학원 자격시험 I

(양자및통계역학) P.1.　　　　　　　　　　1984.9.8

[1] 3개의 전자가 그림과 같이 1차원 포텐셜 Well 안에 있는 경우를 양자역학적으로 고찰 하려한다. 전자의 스핀 양자수는 물론 ½이며 전자사이의 interaction은 무시 하기로 한다.



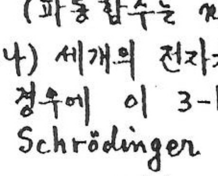
(가) 먼저 한개의 전자가 이 Well에 들어 있는 경우에 대해서 Schrödinger 방정식을 쓰고 모든 가능한 에너지 준위및 그에 대응하는 Spatial (즉 Spin 상태는 빼놓고) 파동함수들을 구하여라 (파동함수는 normalize 시킬 것)

(나) 세개의 전자가 Well 속에 함께 있는 경우에 이 3-body 系에 대한 Schrödinger 방정식은?

(다) 세 전자系의 기저 상태 (ground state)에 대응하는 에너지 고유 값은?

(라) 세개의 전자가 기저 상태에 있을때 그 3-body 파동함수는 어떻게 주어지는가? (스핀 상태가 Spin-up에 해당할때는 χ^+, spin-down 에 해당할 때는 χ^- 로 표시 할것)

[2] 그림과 같이 질량이 m인 입자가 xz 평면상에 원운동을 하도록 구속되어 있다 하자.



(가) 외부에서 다른 힘이 없을때 이 입자의 운동을 기술하는 Schrödinger 방정식을 쓰고 기저 상태 (ground state) 및 제 1 여기 상태 (first excited state)의 에너지 고유값 및 파동함수 (normalize 시킬것)를 구하라.

(나) 이 입자가 전하는 없지만 자기 모우먼트 (크기 μ)를 갖고 자기 모우먼트는 θ를 증가하는 방향 즉 $\hat{\theta}$ 방향으로만 향하도록 구속되어 있다 하자. 여기에 외부에서 z 방향으로 약한 균일한 자장을 걸어 준다면 우리는 (가)에서 생각한 Hamiltonian에

$$H' = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \mu B \sin\theta$$

와 같은 perturbation 항을 더해서 생각해야 할 것이다. 자장이 충분히 약하다고 할때 기저상태의 에너지 고유값을 근사법을 써서 $(\mu B)^2$의 order 까지 정확히 구하라. [※ Total Hamiltonian이 H_0+H' (H': perturbation) 일때 근사 이론에 의하면 에너지 준위는 다음식에 따라 변한다.

$$E_n = E_n^{(0)} + \langle n|H'|n\rangle + \sum_{k\neq n}\frac{|\langle n|H'|k\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_k^{(0)}} + \cdots,$$

$(H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle)$]

(다) 위 (나)의 문제에서 기저상태의 파동함수를 μB의 order 까지 정확히 구하여라.

[3] $(\nabla^2+k^2)G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$의 解로서 주어지는 파동방정식의 Green 함수는

$$G_\pm(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

들로 표시 된다. 이 결과를 Schrödinger 방정식

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(\vec{r})$$

을 만족하는 양자역학적 입자의 산란문제에 응용 하고자 한다. 여기서 static 포텐셜 $V(\vec{r})$은 $|\vec{r}|\to\infty$에서 충분히 빨리 0으로 접근 한다고 가정하자.

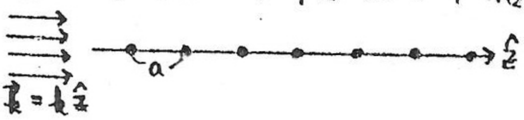
(가) plane wave (incident wave vector $\vec{k}$)가 포텐셜 center를 향해서 입사한다고 생각하고 이에 대응하는 Schrödinger 방정식의 解 $\psi(\vec{r})$을 (포텐셜이 충분히 약할때 iteration procedure에 의해 좋은 근사해를 얻을수 있도록) 간단한 적분방정식 꼴으로 써 보이라 (다음 page 계속)

물리학과 대학원 자격시험 I

 1984.9.8

(나) (가)에서 포텐셜 V가 충분히 약하다고 하고 (first) Born approximation을 쓰면 산란파는 어떻게 주어지는가? 같은 approximation 아래서 산란단면적 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$는?

(다) 만약 다음 그림 처럼 $V(\vec r)$이 (各



포텐셜 center에 대해) 구대칭인 포텐셜을 z축상에 a 만큼 간격으로 배열해 놓은 것에 해당한다면

$$V(\vec r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0(|\vec r - an\hat z|),$$

(여기서 $V_0(r)$은 임의의 주어진 함수) 처럼 놓아도 좋을 것이다. 여기에 입사파가 z 방향으로 들어 왔다면 (first) Born approximation 內에서 산란 단면적이 어떤 Scattering angle 값들에서 peak를 보이겠는가?

$\boxed{4}$ Magnon은 Spin wave를 양자화한 elementary excitation으로서, 저온에서는 이들 사이의 상호작용을 무시할수 있어서 자성체의 자기적 성질을 magnon으로 이루어진 ideal bose gas를 생각함으로써 논의 할 수 있다. Magnon의 wave vector $\vec k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)$ (d = spatial dimension)는 periodic boundary condition을 만족 하도록 $|k_i| < \frac{\pi}{a}$ ($i = 1, 2, \cdots, d$; a는 격자상수)의 범위 내에서 $\vec k = \frac{2\pi}{La}(n_1, n_2, \cdots, n_d)$ (여기서 $(La)^d$ = 체적, $n_i = 0, \pm1, \pm2, \cdots$)로 표시되며 wave vector $\vec k$에 대응하는 excitation energy를 $\hbar\omega(\vec k)$라 하자.

(가) $f(\omega)d\omega$가 에너지가 $\hbar\omega$와 $\hbar\omega+\hbar d\omega$ 사이에 가능한 magnon의 normal mode 數를 나타 낸다고 하자. $\omega\to0$ 일때의 dispersion equation이 $\omega \sim A|\vec k|^s$ 처럼 주어진다면 $\omega\to0$ 일때 $f(\omega)$는

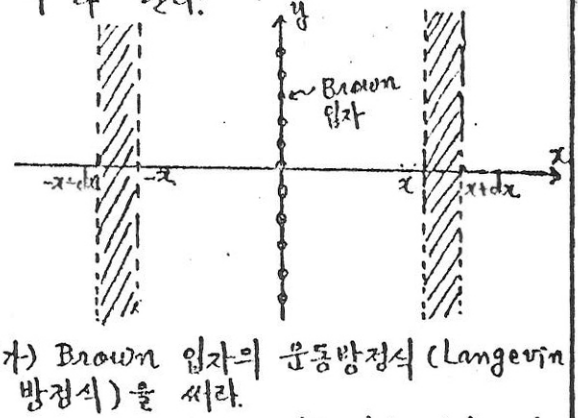
$$f(\omega) \sim B\omega^{\frac{d}{s}-1}, \quad (B\text{는 상수})$$

처럼 주어짐을 보여라.

(나) 온도 T에서 열 평형 상태에 있을때 magnon 들이 기여하는 internal energy U를 일반적 $f(\omega)$에 대해서 어떻게 주어지는지 표시해 보아라

(다) $f(\omega)$에 (가)에서의 결과를 쓰면 $T\to0$ 에서 magnon specific heat는 $T^{d/s}$에 비례함을 보여라.

$\boxed{5}$ N개의 Brown 입자가 그림과 같이 물위에 떠 있다. $t=0$ 순간에 모든 Brown 입자가 y축상에 정렬 되어 있다 하자. Brown 입자 끼리는 상호 작용이 없다고 가정하고 다음 물음에 답하여라. 단 Brown 입자의 질량은 M, 물의 마찰력은 $-M\gamma\dot x$ ($\dot x$는 Brown 입자의 속도), 물의 온도는 T라 한다.



(가) Brown 입자의 운동방정식 (Langevin 방정식)을 써라.

(나) Brown 입자의 평균 자승 변위 $\langle x^2\rangle$을 시간의 함수로 구 하여라 ($\langle \dot x^2\rangle = \frac{kT}{M}$로 주어짐에 유의 하여라)

(다) $t \ll \frac{1}{\gamma}$ 일때 $\langle x^2\rangle$은?

(라) $t\to\infty$ ($t \gg \frac{1}{\gamma}$)의 극한에서 $\langle x^2\rangle$의 시간에 대한 의존도는?

(마) $t \gg \frac{1}{\gamma}$ 일때 빗금친 구역에 평균 몇개의 Brown 입자가 발견 되겠는가?

(끝)