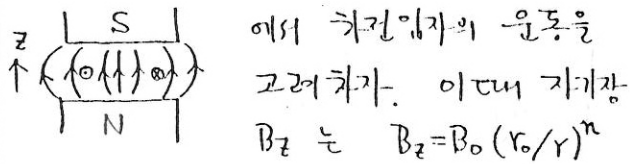


1. 유전체가 가득 채워져 있는 평행 축전기의 전극면적은 A , 극판간격은 d 이다. 유전체의 유전율이 극판 간격을 따라 지수적으로 변한다 (한쪽 극판에서 유전상수는 κ_1 , 다른쪽 극판에서의 유전 상수는 κ_2 , $\kappa_1 < \kappa_2$ 이다)

- 이 축전기의 전기용량 C 를 구하라
- 전극 사이에 전위차 V 를 가했을때 축전기 내부에서의 displacement D 를 구하라
- 전극에 대전된 전하량을 Q 라고 할때 유전체의 전차밀도를 전극사이에서 위치의 함수로 표시하라
- 이 경우 유전체의 전기적 에너지 밀도를 위치의 함수로 구하라.

2. 아래 그림과 같은 쌍극자 자기장



으로 주어진다. 여기서 n 은 양의 값을 가지며, r_0 는 평행궤도의 반경, B_0 는 평행궤도에서의 B_z 이다. 문제를 간단히 하기 위하여 하전입자의 θ 방향 속도 V_θ 는 일정하다고 보고, $E_z = 0$, $B_\theta = 0$, r 은 평행궤도 r_0 에서 미소량 만큼 변하는 상태만 고려할 때

- Maxwell 방정식으로 부터 B_r 을 구하라
- Lorentz force 로 부터 $\Delta r (= r - r_0)$ 과 r 에 대한 운동방정식을 구하라.

c) 평행궤도에 있을 조그은 $\Delta r = \Delta \dot{r} = 0$ 일때이며, 위에서 구한 운동방정식으로 부터 평행궤도의 cyclotron 주기를 구하라

d) 위에서 구한 두 운동방정식이 harmonic oscillator의 운동방정식으로 되는 n 의 영향을 구하고 이때 궤도 운동의 안정성에 대해 말하라.

3. 진공 비결에서 Maxwell 방정식은 다음과 같다

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

a) 이로 부터 4-potential (A, ϕ)를 도입하고 Lorentz gauge에서 Maxwell 방정식을 4-potential로 표시하라

b) 함수 $G^{(\pm)}(r, t; r', k') = \frac{\delta(t' - (t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 가

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(r, t; r', k') \\ & = -4\pi \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

을 만족시킴을 이용하여 이를 구하라. ($\phi_{out} = 0$ 로 둘것) 이 결과를 이용하여 source가 국소화(localized) 되어 있을 경우 전기단극장(electric monopole term)의 복사에 대한 영향을 논하라.

c) source가 $\rho = \rho(r) e^{-i\omega t}$
 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r) e^{-i\omega t}$
 로 주어지고 그 크기가 d 라고 하자.

좌-편측의 원점을 source 위치
 잡을 때 복사지역 (radiation zone)
 $d \ll \frac{2\pi}{k} \ll |x - x'|$ 이다. ($k = \omega/c$)

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{cr} \int J(x') e^{ik\hat{n} \cdot x'} d^3r' \\ &= \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{cr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int J(x') (\hat{n} \cdot x')^n d^3r' \end{aligned}$$

으로 근사치를 보이라 (여기서 $\hat{n}$ 은
 source 에서 x 방향의 단위 벡터이다.)
 그리고 위 식에서 $n=0$ 항만을 고려
 한 경우 복사지역에서

$$\underline{B} = k^2 (\hat{n} \times \underline{P}) \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r}$$

$$\underline{E} = \underline{B} \times \hat{n}$$

임을 보이라 여기서 $\underline{P}$ 는 전기

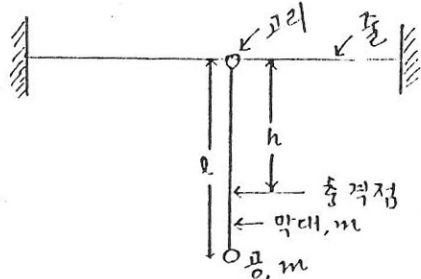
쌍극자 모멘트

$$\underline{P} = \int \underline{r}' \rho(\underline{r}') d^3r' \quad \text{이다.}$$

in Cylindrical coordinate (r, θ, z)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{A} &= \hat{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \\ &+ \hat{\theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \\ &+ \hat{z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

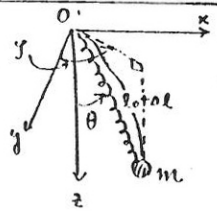
4) 그림과 같이 질량이 m 이고 길이가 l 인 균일한 막대가 수평으로 매달려 마찰이 없는 줄에 고리에 의해 매달려 있다.



막대의 아래쪽 끝에 크기를 무시할 수 있는 질량 m 인 공이 달려 있고 막대는 줄을 따라 자유로이 움직일 수 있다. 고리의 크기의 영향을 무시하고 다음 질문에 답하라.

- 막대가 줄에 매달린 점을 원점으로 하여 막대와 공으로 이루어진 계의 질량 중심을 구하라.
- 막대와 공이 원점 주위에 갖는 관성 모멘트와 질량 중심 주위에 갖는 관성 모멘트를 구하라.
- 이 계에 줄로부터 거리 h 인 막대의 한 점에 충격 (충격량 I)을 가한다. 충격으로 인한 각운동과 선운동에 대한 식을 세우라.
- (C)의 경우 충격을 가하는 순간에 줄에 달린 고리가 움직이지 않도록 하려면 충격을 가하는 점의 위치를 어디에 잡아야 되겠는가?

(5) 그림과 같이 평형 상태에서의 길이가 l_0 이고 탄성 계수 k 인 질량을 무시할 수 있는 용수철의 한 쪽 끝에 질량이 m 인 구를 달아서 진자를 만들었다. 중력의 가속도를 g , 공기 및 정점 "O"에서의 저항을 무시하고 구를 질점으로 생각하고서 다음 질문에 답하라. 용수철도 휘어지지 않는다고 하자.



- 용수철의 늘어남 길이 Δl , 및 각 θ , y 를 일반화 좌표로 하여 이 계의 Lagrangian을 쓰라.
- 이 진자가 평형 위치에 정지하고 있을 때의 길이 l 을 구하고 이 정지 상태에서 길이 l 에서부터의 변위 y 를 하나의 일반화 좌표로 해서 $l \approx l_0$, $y \ll l_0$, $\theta \approx 0$ 일때 y , θ , y 로 이 계의 운동 방정식을 쓰라.
- y 에 관해서는 어떤 운동이 되는가?
- θ 와 y 의 운동에 대해서 논하라.
- (b)의 근사를 취했을 경우 이 계의 Hamiltonian을 구하고 Hamilton의 운동 방정식을 쓰라. Constant of motion은 어떤 것들이 있는가?

1. 두개의 중양성자 (deuteron)로 구성된 D_2 분자는 시간 $t=0$ 일 때 다음과 같은 회전 상태에 있음이 알려졌다.

$$\Psi(0, \varphi, t=0) = \frac{1}{\sqrt{26}} \{ 3 Y_{1,1}(0, \varphi) + 4 Y_{2,2}(0, \varphi) + Y_{2,1}(0, \varphi) \}$$

단 i) $Y_{\ell, m}(0, \varphi)$ 는 구조함수를 나타낸다.

ii) D_2 분자는 회전능률 I 를 갖는 강체 회전자 (rigid rotator)이며 전자의 상태는 고려하지 않아도 됨.

a) L^2 과 L_z 를 한번 측정한다면 측정값은 무엇이 되며 또 그 값들을 갖게되는 확률을 각각 구하라.

b) $t \neq 0$ 인 경우 D_2 분자의 상태 $\Psi(0, \varphi, t)$ 는 어떻게 되는가?

c) D_2 분자의 평균에너지 $\langle E \rangle$ 를 $t > 0$ 인 경우에 대하여 구하라. 이 값은 시간이 지나 감에 따라 변하는가?

d) 중양성자 D는 스핀이 1인 boson 이다. 두개의 D로 이루어진 D_2 의 파동함수는 두 D를 교환하여도 변하지 않는다고 생각할 수 있다. 위에서 주어진 $\Psi(0, \varphi)$ 가 D_2 의 공간좌표에 대한 파동함수 라면

D_2 의 스핀은 무엇이 되겠는가?

2. 수소 원자핵을 외포계의 원점에 고정된 듯 전하로 볼 때 원자의 기지상태를 나타내는 전자의 지름 파동함수 (radial wave function)는

$$\psi_{1s}(r) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0} \quad \text{이다.}$$

여기서 $a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c}$, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ 임.

a) 이 지름파동함수가 만족시키는 미분방정식을 쓰고 또 a_0 의 크기를 구하라.
(hint: $\hbar c \approx 200 \text{ MeV fm}$)

b) 만약 수소 원자핵이 움직이지 않고 배경이 R인 포구 내부에 균일하게 분포된 대전체라면 이러한 원자핵에 의한 전자의 포텐셜 에너지를 구하라.

c) 수소 원자핵이 움직이지 않을 때의 기지상태의 에너지와 문 b)에서와 같이 원자핵이 $R \sim 10^{-13} \text{ cm}$ 의 구 안에 균일하게 분포된 대전체 일때의 기지상태의 에너지와의 차이를 1차 근사 섭동법 (1st order perturbation method)을 쓰서 대략 구하라.

(4) 총 에너지가 E_0 , 입자수 N_0 인 전자들로 이루어진 계를 생각하자. 이 계를 하나의 orbital로 된 subsystem A와 에너지 및 입자의 reservoir 역할을 하는 나머지 부분 B로 나누고 A에 전자가 없는 상태를 $|0\rangle$, 스핀 + 또는 - 인 전자가 하나 있는 상태를 $|1+\rangle$ 또는 $|1-\rangle$, 전자가 두 개 차 있는 상태를 $|1\uparrow\downarrow\rangle$ 로 표시하고 subsystem A의 에너지는 상태가 $|0\rangle$ 이면 0, $|1\uparrow\rangle$ 또는 $|1\downarrow\rangle$ 이면 ϵ , $|1\uparrow\downarrow\rangle$ 이면 $2\epsilon + U$ 로 주어진다 고 하자. 이때 U는 두 전자가 하나의 orbital에 동시에 있기 때문에 나타나는 추가적인 에너지 (extra energy)이다. Reservoir B가 에너지 E, 입자수 N일 때 B에 대한 가능한 상태의 수를 $W(E, N)$ 이라 하고 다음 질문에 답하라.

- A의 상태가 $|0\rangle$ 이면 B의 에너지는 E_0 , 입자수는 N_0 이다. 이때 이 계의 엔트로피 S는 얼마인가?
- B의 에너지가 E_0 , 입자수가 N_0 일 때, B의 온도 T와 화학 퍼텐셜 μ 를 W 또는 S 로 표시하라.
- 열평형 상태에서 A가 $|0\rangle, |1+\rangle, |1-\rangle, |1\uparrow\downarrow\rangle$ 의 각 상태에 있을 확률을 T와 μ 로 나타내어라. (비례상수는 명시하지 않아도 좋다)
- A에 있는 전자수의 열평균치 $\langle n \rangle$ 를 주하라.
- 위에서 구한 $\langle n \rangle$ 가 $U \rightarrow 0$ 및 $U \rightarrow \infty$ 인 두 극한에서 어떤 값을 갖는지 살펴보고 이를 물리적으로 해석하라.

(5) 체적 V안에 온도 T에서 열평형 상태에 있는 광자 (photon) 들로 이루어진 계의 성질을 고찰하려고 한다.

- 광자들은 어떤 과정을 통해 열평형 상태에 도달하게 되는지 간단히 설명하라. 또 이 계는 많은 경우 상호 작용이 거의 없는 이상적인 boson 개스로 생각해도 충분한데 이 말이 물리적으로 뜻하는 바는 무엇인가?
- 이 광자로 이루어진 개스계의 화학 퍼텐셜은 어떻게 주어지는지 말하고 그 이유를 설명하라.
(다음 질문부터는 이 광자 개스계를 이상적인 boson 개스로 취급하라)
- 온도 T에서 선운동량 $\hbar \vec{k}$ (대응하는 에너지: $\hbar \omega = \hbar c |\vec{k}|$)를 갖는 양자 상태에 대한 평균 광자 분포 함수 $\bar{n}$ 은 어떻게 주어지는가? (답만 써도 좋다). 이 결과를 이용해서 온도 T에서 광자들의 총 갯수는 T^3 에 비례함을 보이라.
- 온도 T에서 진동수 간격 $d\omega$ 에 대응하는 에너지 분포 dE_ω 가 어떻게 주어지는지 쓰고 총 복사 에너지를 T와 V의 함수로 표시하라.
(단 $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$).
- 이 계의 엔트로피 S를 T와 V의 함수로 구하라.