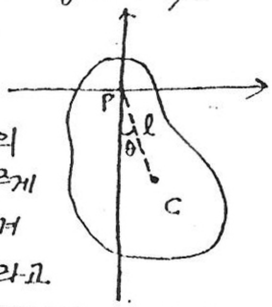
물리학과 대학원 자격시험 I

과목명 (역학 : 100점 만점) (90분) 198[illegible]. 9. 7.

문제 1. 그림과 같은 강체 (rigid body)가 P점을 지나는 축에 대하여 자유로이 회전하고 있다. 이 강체의 질량은 M이고 그 무게 중심은 C점에 있으며 $\overline{PC}$의 길이는 l이라고 하자. 이 강체는 중력장 내에 있다.



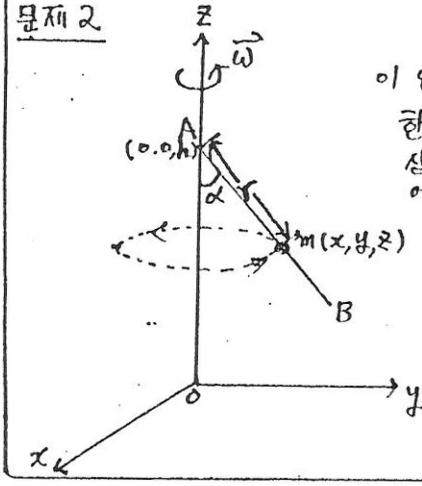
(1). 무게중심인 C점을 지나는 축에 대한 이 강체의 관성능률을 $I_{C.M.}$이라고 할때 P점 (C점을 지나는 축과 평행한)에 대한 강체의 관성능률을 구하라.

(2). 그림에서와 같이 P점에서 수직하게 내린 선과 $\overline{PC}$가 만드는 각을 θ라고 할때 이 강체의 운동 방정식을 써라.

(3). 이 강체가 $\theta=0$ 주위를 매우 작은 각도로서 진동 한다면 이때 운동 방정식의 해를 구하고 이 강체의 진동수를 구하라.

(4) 이 강체가 그림과 같은 것이 아니고 반경 R, 길이 L인 원기둥이고 $l=\frac{R}{4}$ 이라면 미소진동일때 이 원기둥의 진동수를 구하라.

문제 2



그림과 같이 질량이 없는 막대 AB의 한쪽끝 A가 z축 상의 한점 $(0,0,h)$에 고정되어 있으며 이 막대 AB가 OA 주위를 일정한 각속도 ω로 돌고 있다. 이때 질량 m인 구슬이 이 막대 상을 움직이고 있다고 하자. 구슬과 막대간의 마찰은 없다고 보며 z축과 막대 AB 사이의 각 α는 시간의 함수이다.

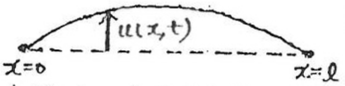
(1) 이 계의 Lagrangian을 구하라

(2) r과 α에 대한 운동방정식(Lagrangian equation)을 구하라.

(3) 만약 $\dot{\alpha}=\ddot{\alpha}=0$ 라 하면 (2)에서 구한 α에 대한 운동 방정식이 어떻게 써지나를 보이고 이 식의 물리적 의미를 설명하라.

(4). (3)번과 같은 조건하에서 이 구슬이 $t=0$일때 A점에 정지되어 있었다고 하자. 이 구슬의 운동을 시간의 함수로 표시하고 막대 AB의 길이를 l이라 할때 이 구슬이 B점에 도착하는데 걸리는 시간을 구하라.

문제 3.



그림처럼 $x=0$, l에서 고정되어 있는 끈(string)이 있다. 이 끈의 단위길이당 질량은 σ이고, 끈에 미치는 장력 τ는 어디에서나 일정하다.

(1). 중력과 공기 저항을 무시하고 변위 $u(x,t)$에 대한 운동 방정식이

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

임을 유도하고 v를 σ와 τ로 표시하라. 단 변위 u는 l에 비해 아주 작다고 하자.

(2) $u(x,t)$를 경계조건을 참작하여 $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$ 로 Fourier 전개하자. $t=0$에서의 초기 변위가 $u(x,0)=u(x)$로 주어졌을때 $q_k(0)$가

$$q_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l u(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

임을 보이라.

(3) 이 끈의 전체 운동에너지 T를 $\dot{q}_k(t)=\frac{dq_k}{dt}$로 표시하라

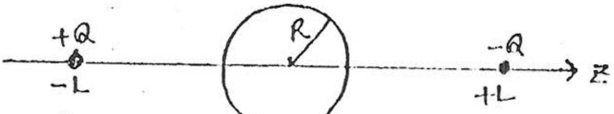
(4) 일반좌표 $q_k(t)$가 만족하는 미분방정식을 구하고 이로부터 Lagrangian을 $q_k(t)$ 및 $\dot{q}_k(t)$로 나타내어라.

과목명(전자기학 ; 150점 만점) (120분) 1985. 9. 7.

문제 1

(1) 반지름이 R인 구형의 도체가 접지 되어 있다. 이 도체의 중심에서 $\vec{d}\,(d, \theta=0, \phi=0)$ $(d>R)$ 의 위치에 점 전하 q가 놓여 있을때 전기적 경계 조건을 만족 시킬수 있는 image charge 의 위치와 크기를 구하라.

(2) 그림과 같이 두개의 점전하가 있어 $z=-L$ 인 위치에 $+Q$, $z=+L$인 위치에 $-Q$가 놓여 있다고 하자.

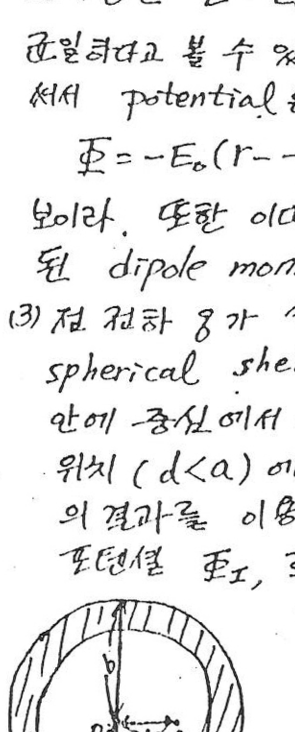


여기서 Q/L^2 을 일정하게 유지하고, $L\to\infty$, $Q\to\infty$ 로 보내는 극한을 생각하면 두 점전하에 의한 도체구 부근에서의 전기장은 $\vec{E}\simeq E_0\hat{z}=\frac{2Q}{L^2}\hat{z}$ 로 균일하다고 볼 수 있다. 위 (1)의 결과를 써서 potential은

$$\Phi=-E_0\left(r-\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

로 주어짐을 보이라. 또한 이때 도체구에 induce 된 dipole moment 를 구하라.

(3) 점 전하 q가 속이 빈 Grounded spherical shell (내경 a, 외경 b) 안에 중심에서 부터 d 만큼 떨어진 위치 $(d<a)$ 에 있다고 하자. 위 (1)의 결과를 이용하여 모든 공간에서의 포텐셜 Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III} 를 구하고 또 전하 q에 작용하는 전기적 힘을 구하라.



문제 2

medium이 없을때 Magnetostatics 의 기본 방정식은 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$ 이다. 전류 $\vec{J}$가 원통 좌표계에서 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\vec{J}(\rho,\varphi,z)=\begin{cases} h(\rho)\hat{\varphi}, & \rho\le a \\ 0, & \rho>a\end{cases}$$

(여기서 $h(\rho)$는 어떤 주어진 함수, $\hat{\varphi}$는 unit vector)

(1). 자장 $\vec{B}$ 는 $\rho>a$로 주어지는 전 영역에서 0 임을 보이라.

(2) 이때 cylindrical 영역 $\{\rho\le a\}$에 trap된 magnetic flux $\Phi=\int_{S:(z=z_0,\ \rho\le a)}\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 는

$$\Phi=\frac{8\pi^2}{c}\int_0^a\rho\,d\rho\int_\rho^a h(\rho')\,d\rho'$$

으로 표시됨을 보이라.

(3) 대응하는 Coulomb-Gauge vector potential $\vec{A}$, 즉 $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ 을 만족하는 $\vec{A}$ 는 영역 $\{\rho>a\}$ (즉 $\vec{B}=0$ 인곳) 에서 어떻게 주어지는가?

(4) 이경우에 전하 q를 가진 입자를 갖고 quantum interference experiment 를 한다고 가상할 때 phase factor $e^{\frac{iq}{\hbar c}\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{r}}$ (여기서 C 는 영역 $\{\rho>a\}$ 에 위치한 임의의 폐곡선을 가리킴.) 은 특별한 의미를 갖는다. Trap 된 magnetic flux Φ 가 어떤 값들을 가질때에 한하여 이 phase factor가 폐곡선 C 를 어떻게 취하든 관계없이 항상 1 이 되는지 밝히라.

「참고: 원통 좌표계에서

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)+\hat{\varphi}\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)+\hat{z}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\varphi)-\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right]$$

」

문제 3

(1) 전기전도도가 σ 인 도체 내부에서 전파되는 전자파의 $\vec{E}$ 및 $\vec{H}$ 사이에 다음과 같은 관계식이 성립함을 보이라. (단. 이 도체의 유전율 및 투자율은 $\epsilon = K\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ 이다)

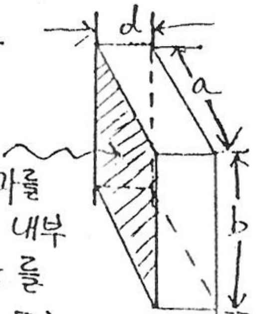
$$\vec{k}\times\hat{B} = -\frac{\omega}{c^2}\mathcal{K}\hat{E}, \quad \mathcal{K} = K + i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}.$$

여기서 $\vec{E} = \hat{E}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ 이다. $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

(2) microwave 파장 부근의 전자파일 경우에 (1)에서 구한 $\mathcal{K}$ 는 $\mathcal{K} \simeq \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}$ 로 근사될 수 있다. 이때 이 도체내부에서 전자파가 진행할 수 있는 skin depth δ 를 구하라. (힌트: $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$)

(3). (2)의 경우에 average Poynting vector $\frac{1}{2}Re\langle\vec{E}\times\vec{H}^*\rangle$를 구하라.

(4). 그림과 같이 두께가 d인 금속 도체판에 수직하게 전자파가 입사했을때 (3)의 결과를 이용하여 이 도체판 내부에서의 power loss 를 구하라. (단 $d > \delta$)



(5) 이 판 내에서의 Joule heat loss를 구하고 (4)의 결과와 비교하여 차이가 있으면 그 원인을 규명하라.

<참고) medium 내에서의 Maxwell 방정식은

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \sigma$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$

문제 4.

Maxwell 방정식을 4차원 공간 $[x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)]$ 에서 공변적 (covariant)으로 쓰기 위하여 4-vector $A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4 = i\phi)$ 로 부터 전자기장 tensor

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

를 도입한다. 여기서 $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ 는 벡터 포텐셜이고 ϕ는 스칼라 포텐셜이다.

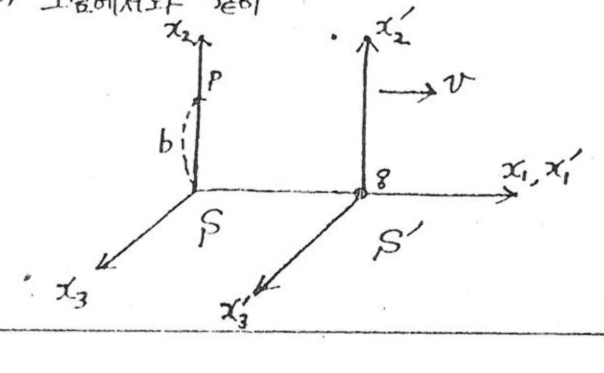
(1) $F_{\mu\nu}$ 가

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

으로 표시됨을 보이라. 단 $\vec{B}$ 및 $\vec{E}$ 의 한 성분에 대해서 증명하면 된다.

(2) $F_{\mu\nu}$를 이용하여 Maxwell 방정식을 표기하면 $\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c}J_\mu$ 로 쓸 수 있음을 보이라. 단 윗식에서 $\mu=4$ 일때와 $\mu=1$ 일때 만을 풀어서 이에 해당하는 Maxwell 방정식을 유도하면 된다. 여기서 $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$ 이고 $\vec{J}$는 벡터 current, ρ는 전하밀도 이다. 또 이식은 연속 방정식 (Continuity eq.)을 만족함을 보이라.

(3) 그림에서와 같이



과목명(전자기학 : 150점 만점) (120분) 1985. 9. 7.

→ 문제 4 의 (3) 계속.

두 좌표계 S 와 S' 상에 있는 임의의 점 x_μ 와 x_μ' 사이에 다음과 같은 관계가 있다.

$$x_\mu' = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu .$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

여기서 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$ 이다.

$F_{\mu\nu}' = \sum_{\lambda,\tau} a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$ 임을 이용하여 S 계에서의 $\vec{E}$, $\vec{B}$ 는 S' 계에서 다음과 같이 변함을 보이라.

$E_x' = E_x$, $E_y' = \gamma(E_y - \beta B_z)$,

$E_z' = \gamma(E_z + \beta B_y)$

(4). 전하 q 가 S' 좌표계 원점에 고정되어 있다. [(3)번의 그림 참조]. 따라서 x_1 축을 따라 움직이는 전하 q 의 속도는 S 좌표계에서 v 이다. ((3)번 에서의 v 와 같음). $t=0$ 에서 두 좌표계가 겹쳐 있었다고 하면, 이 전하가 시간 t 후에 만드는 P 점에서의 전기장 E_1, E_2 및 E_3 를 b, v, t 의 함수로 구하라.

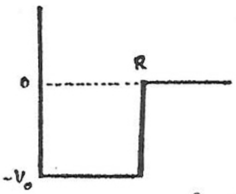
물리학과 자격시험 (1985. 9. 7)

(120분) (양자역학) (150점 만점)

1. Central Potential $V(r)$ 내에 있는 에너지 E, 질량 m인 입자를 고려하자.

(1) 이 입자의 상태를 기술하는 슈뢰딩거 방정식을 써라.

(2) 그림과 같이 $V(r)$이



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \ r < R \\ 0 & , \ r > R \end{cases}$$

로 주어질 때 기저상태의 파동함수를 구하라.

(참고: $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$)

(3) 기저 상태에 있는 이 입자가 $r > R$에 존재할 확률을 구하라.

2. Spin $\frac{1}{2}$을 가진 전자에 $\vec{B} = B_0 \hat{z}$의 균일한 자기장을 걸어 주었을 때 해밀토니안은

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{eB_0}{mc} S_z \text{ 로 쓸 수 있다.}$$

(Kinetic energy 등 다른 자유도들은 무시한다)

$\vec{S}$는 스핀 각운동량 연산자로서

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

로 주어진다.

(1) 시간 $t=0$ 일때 x 방향의 스핀 각운동량을 측정하여 $\hbar/2$ 값을 얻었다. 시간 $t\,(>0)$에서의 전자의 스핀 상태 벡터

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

를 구하라.

(2) $t = \frac{mc\pi}{2eB_0}$ 일때 z 방향의 스핀성분 S_z를 측정한다면 그 값이 spin up 와 spin down 일 확률을 각각 구하라. 또 x, y 방향의 스핀 각운동량 기대치 $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$를 시간의 함수로 구하라.

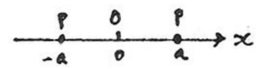
(3) 만일 $S' = S_x\cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t)$ 라는 연산자를 정의하면 (1)에서 구한 상태 벡터 $\psi(t)$가 S'의 고유상태 벡터임을 보여라.

(4) (2)번에서 구한 $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$의 기대치를 보면, 전자의 스핀이 마치 gyroscope 처럼 xy 평면상에서 세차(precess)한다고 고전적인 해석을 할 수 있다. 이 문제를 각속도 ω로 시계 반대 방향으로 회전하는 좌표계에서 볼때 이 회전좌표계에서의 x 방향의 스핀성분 $\langle S_x^*\rangle$가 시간에 따라 변하지 않음을 보이라. (Hint. $\hat{n}$이 회전축 방향의 단위 벡터일때

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta\,\hat{n}\cdot\vec{S}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\frac{2}{\hbar}\hat{n}\cdot\vec{S}\sin\frac{\theta}{2} \text{ 이다})$$

3. 두 양성자가 그림과 같이 x축상에 $2a$의 거리만큼 떨어져 있다. 여기에 두개의 전자가 들어간다고 할 때, 두전자계의 전체 해밀토니안은 다음과 같다.

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 + V_{(-a)}(\vec{r}_1) + V_{(+a)}(\vec{r}_1)\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 + V_{(-a)}(\vec{r}_2) + V_{(+a)}(\vec{r}_2)\right) + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$



(여기서 $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$는 두 전자의 위치 좌표이고

$$V_{(-a)}(\vec{r}) = \frac{-e^2}{|\vec{r} + a\hat{x}|}$$

$$V_{(+a)}(\vec{r}) = \frac{-e^2}{|\vec{r} - a\hat{x}|}$$

처럼 주어진다.) H 가운데 $\frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ 항은 무시한다면 두 전자系의 기저상태는 1-electron 해밀토니안

$$h = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{(-a)}(\vec{r}) + V_{(+a)}(\vec{r})$$

을 잘 고찰함으로써 구할 수 있다.

(1) 먼저 위의 h의 기저상태 파동함수 $\Phi_0(\vec{r})$과 그 고유에너지 E_0를 근사적으로 구해보려 한다. 그 한 방법으로 두 양성자가 상당한 거리를 갖고 있을때는

(뒷면 계속)

(120 분) (양 자 역 학) (150 점 만점)

$$h_{(-a)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{(-a)}(\vec{r}),$$

$$h_{(+a)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{(+a)}(\vec{r})$$

와 같이 두 hydrogenlike Hamiltonian (but with different centers) 들의 기저상태 파동함수 $\phi_{(-a)}(\vec{r})$, $\phi_{(+a)}(\vec{r})$ 을 구한 다음, $\Phi_0(\vec{r})$를 $\phi_{(-a)}(\vec{r})$과 $\phi_{(+a)}(\vec{r})$의 선형결합으로 정의되는 vector space 에서 해밀토니안 h를 diagonalize 함으로서 얻을 수 있다. h의 행렬요소가

$$\langle \phi_{(+a)} | h | \phi_{(+a)} \rangle = \langle \phi_{(-a)} | h | \phi_{(-a)} \rangle = \varepsilon_0,$$

$$\langle \phi_{(-a)} | h | \phi_{(+a)} \rangle = \langle \phi_{(+a)} | h | \phi_{(-a)} \rangle = -\Delta$$

(여기서 Δ 는 real and positive)

처럼 주어질때 이 방법에 의하여 $\Phi_0(\vec{r})$과 E_0를 $\phi_{(-a)}(\vec{r})$, $\phi_{(+a)}(\vec{r})$ 및 ε_0, Δ로 표시하라. (단 $\langle \phi_{(-a)} | \phi_{(+a)} \rangle$ 는 무시될 만큼 작다고 가정하라.)

(2) 위 (1)에서 구한 $\Phi_0(\vec{r})$을 가지고, $\dfrac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ 항을 무시할 경우 두 전자 해밀토니안 H의 기저상태 $\Psi(1,2)$를 구하라.
(전자의 스핀과 Pauli 배척 원리를 고려할 것.)

(3) $\Psi(1,2)$를 $\phi_{(-a)}(\vec{r}_i)$, $\phi_{(+a)}(\vec{r}_i)$, $(i=1,2)$로 풀어 썼을때 각 항의 물리적의미를 간단히 설명하라. 또 이제까지 무시했던 $\dfrac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ 항을 고려할 경우 이들 각 항이 기저 상태에너지에 미치는 변화를 간단히 설명하라.

4. x축의 왼쪽 $(x<0)$에서 오른쪽 $(x>0)$으로 진행하는 평면파

$$\psi_{in}(x) = e^{ikx}, \quad \left(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

가 포텐셜 $V(x) = V_0\,\delta(x)$ $(V_0 > 0)$에 의해 산란되었다. 파동함수가 $x \to \pm\infty$ 에서

$$\psi(x) = \psi_{in}(x) + f(\epsilon)\, e^{ik|x|} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\left(\epsilon = \frac{x}{|x|} \text{ 즉 } \pm 1\right)$$

인 형태의 해를 구하고자 한다.

(1) 구하고자 하는 슈뢰딩거 방정식의 해를

$$\psi(x) = \psi_{in}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{e^{ipx/\hbar}}{E - \frac{p^2}{2m}} V_0\, \psi(0) \qquad \cdots\cdots ②$$

$(p = \hbar k)$

의 형태로 놓을 수 있음을 보이라.

(2) 식 ②로 부터 $f(\epsilon)$ 및 $\psi(0)$를 m, p, V_0로 표시하라.
(Hint $\dfrac{1}{2\pi i}\oint dz \dfrac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0)$)

(3) 산란된 파의 반사진폭 (R)과 투과진폭 (T)을 $f(\epsilon = \pm 1)$의 함수로 표시하라.

(4) 위 (3)의 결과를 이용하여 optical theorem 이라고 할 수 있는

$$\mathrm{Re}\, f(\epsilon = 1) = \frac{-1}{2}\sigma_{tot}$$

을 만족하는 전체 충돌 단면적 σ_{tot}를 $f(\epsilon)$으로 표시하라. (flux가 보존됨을 이용할것.) σ_{tot}의 각 항에 대한 물리적 의미를 설명하라.