양자 역학

1. z 축 방향으로 균일한 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 내에 전자가 있을 경우를 양자역학적 관점에서 취급하려 한다.

ㄱ) vector potential $\vec{A}$ 를 취함에 있어서 게이지 조건을 $A_y = A_z = 0$ 로 잡았다고 할 때 이 전자의 Hamiltonian 은

$$H = \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x + \frac{eB}{c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2\right) - \frac{e\hbar}{mc}\hat{S}_z B$$

로 표시됨을 보여라. (여기서 $\hat{S}_z$ 는 z 축 방향으로의 전자 스핀 연산자 이다.)

ㄴ) 이 전자의 에너지가

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B + \frac{P_z^2}{2m} - \frac{e\hbar}{mc}\sigma B$$

의 형태로 표시됨을 보이고 ω_B 의 값을 구하라. (여기서 n 은 정수, P_z 는 $\hat{P}_z$ 의 고유치, $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ 임.)

ㄷ) (ㄴ)에서 주어진 에너지 표현 속의 처음 두 항이 나타내는 의미를 전자의 고전 역학적 운동과 관련하여 설명하라.

2. 어떤 m 차원 vector 공간의 기저 (basis)로서 m 개의 state vector 들:

$$|i\rangle \quad (i = 1, \cdots, m)$$

또는

$$|j'\rangle \quad (j = 1, \cdots, m)$$

을 잡을 수 있다 하자. (여기서 $|i\rangle$ 와 $|j'\rangle$ 들은 각각 orthonormal basis를 이룬다고 가정할 것.)

ㄱ) 두 기저간에

$$|j'\rangle = \sum_i |i\rangle U_{ij}$$

와 같은 관계가 있을 때 행열 U 는 unitary 이어야 함을 보여라.

ㄴ) 어떤 연산자 $\hat{O}$ 가 기저를 $|i\rangle$ 로 잡을 때

$$O_{ki} = \langle k|\hat{O}|i\rangle$$

와 같이 $m \times m$ 행열 O 로 표시될 때 이 연산자 $\hat{O}$ 는 기저 $|j'\rangle$ 위에서는 어떤 행열로 표시 되는가? (행열 O 및 U 를 이용해서 나타내고 답이 나온 과정을 분명히 할 것.)

특별한 예로서 3차원 vector 공간이라 하고 그 기저를 일단

(다음 장에 계속됨)

(앞장에서 계속)

$|1\rangle = \frac{x}{r}$, $|2\rangle = \frac{y}{r}$, $|3\rangle = \frac{z}{r}$

(x, y, z 는 직교좌표 , $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

처럼 잡자.

ㄷ) 이 기저 위에서 미분 연산자

$$\hat{O} = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

에 대응하는 행렬을 위에서의 방법을 따라 구하라.

ㄹ) 새로운 기저 $|1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle$ 을 어떻게 잡으면 미분연산자 $\hat{O} = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ 는 diagonal 행렬로 표시되는가? 그리고 이 때 diagonal 행렬은 구체적으로 어떻게 주어지는지 말하라.

3. 3차원에서 time-independent Schrödinger 방정식

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$$

(여기서 $V(\vec{r})$ 은 $|\vec{r}|\,V(|\vec{r}|) \xrightarrow[|\vec{r}|\to\infty]{} 0$ 를 만족한다고 가정)

을 써서 산란현상을 기술하고자 한다. $E>0$ 일 때 이 방정식의 해가 충분히 큰 $r = |\vec{r}|$ 에 대해

$$\psi(r,\theta,\phi) \xrightarrow[r\to\infty]{} A\left[e^{ikz} + \frac{1}{r}f(\theta,\phi)\,e^{ikr}\right]$$

(여기서 r, θ, ϕ 는 구좌표를 나타내고 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $z = r\cos\theta$ 임)

의 형태를 갖는다 하자.

ㄱ) 미분 단면적 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 를 먼저 정의한 다음 그 정의에 입각하여

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2$$

가 됨을 보여라.

ㄴ) Born 근사법을 이용하면 scattering amplitude 는

$$f_B(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r})\,e^{i\vec{g}\cdot\vec{r}}\,d^3\vec{r}$$

(여기서 $\vec{g} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$, $\vec{k}_i = k\hat{i}$, $\vec{k}_f = k(\sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k})$ 임)

와 같이 쓸 수 있다. 이 때

$V(\vec{r}) = V(r)$ (즉 r 만의 함수)

이면 scattering amplitude 는

$$f_B(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2|\vec{g}|}\int_0^\infty r\,V(r)\sin(|\vec{g}|r)\,dr$$

가 됨을 보여라.

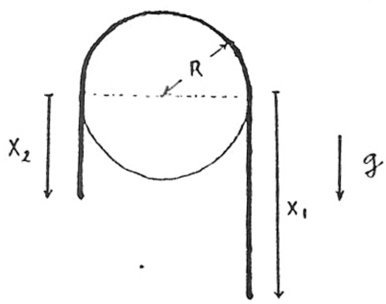
ㄷ) 포텐셜이

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

(여기서 $a>0$)

처럼 주어질 때 Born 근사법을 써서 미분 단면적을 구하라.

1. 그림과 같이 반경 R, 질량 M 인 원판형의 도르래에 길이 l, 질량 m 인 균일한 사슬이 걸려있다.



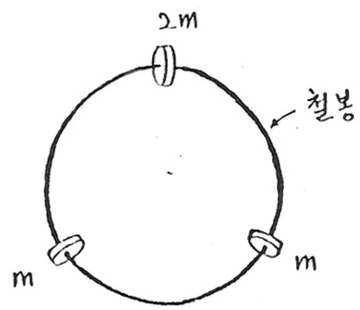
중력장 내에서 이 사슬의 운동을 공부하고자 한다.

ㄱ) 도르래는 고정되어 있고 그 위를 사슬이 미끄러진다고 생각할 때 사슬의 운동 방정식을 적고, 도르래 양측에 늘어진 길이차가 $x_1 - x_2 = P$ 인 순간에 사슬의 가속도를 구하라. (단, $0 < x_1 - x_2 < l - \pi R$ 인 경우만을 고려하고 마찰은 무시한다.)

ㄴ) (ㄱ)의 경우에 $x_1 - x_2 = P$ 인 상태에서 사슬을 붙잡고 있다가 $t = 0$ 인 순간에 놓아 주었다고 할 때 $x_1 - x_2$ 를 시간 t 의 함수로 표시하라.

ㄷ) 만약 도르래 위를 사슬이 미끄러지는 대신 도르래와 사슬이 미끄러짐 없이 함께 회전하는 경우라면 사슬의 운동 방정식은 어떻게 주어지는가?

2. 질량이 각각 2m, m, m 이고 반경이 a 인 원판 세개가 그림과 같이 원 주위에 $120°$ 간격으로 고정되어 있다. 원판 사이에 가는 철봉이 연결되어 있고, 원판의 운동은 단지 철봉을 축으로 한 회전운동만이 가능하다고 하자.



철봉의 비틀림계수를 α (즉, 복원 torque 가 두 원판사이의 비틀림각에 비례하며 이 때 비례상수를 [illegible]) 라 하고 철봉의 질량을 무시할 때 다음 물음에 답하라.

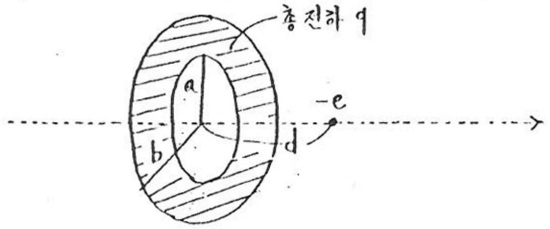
ㄱ) 이 계의 운동을 기술하기에 편리한 일반화 좌표 (generalized coordinates) 를 정하고 Lagrangian 을 적어라.

ㄴ) 이 계의 normal frequency 들을 구하라.

ㄷ) (ㄴ)에서 구한 normal frequency 들에 대응하는 normal mode 들을 찾고 그 의미를 논의하라.

(전기역학)

1. 그림과 같이 얇은 부도체로 된 반경 b인 원판(disk)에 반경 a인 구멍이 뚫여 있다. 이 원판에 전하 q (여기서 q > 0)가 균일하게 분포되어 있다. 그리고 원판의 중심축상에 원판으로 부터 거리 d만큼 떨어진 곳에 전자가 놓여 있고 이 전자는 축상을 자유로이 움직일 수 있다고 하자.



(ㄱ) 주어진 전자의 위치에서의 electrostatic 포텐셜을 구하라.

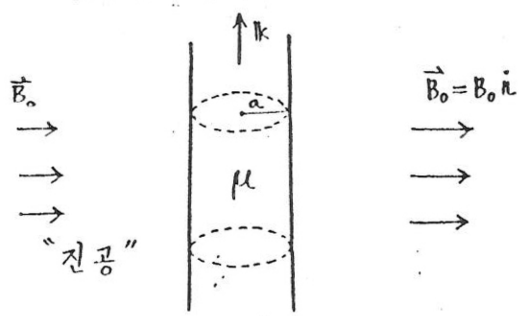
(ㄴ) 이때 전자가 받는 힘을 구하고 그힘의 영향아래 전자가 어떤 운동을 하는지 밝혀라.

(ㄷ) 만약 radiation 까지 감안 한다면 이 전자의 운동은 어떻게 될것인지 정성적으로 논의 하라.

2. (ㄱ) 전류가 흐르지 않을때 진공과 투자율(magnetic permeability)이 μ인 매질 속에서 <u>static</u> magnetic field가 만족하는 방정식 (Maxwell의 방정식)을 각각 써라.

(ㄴ) (ㄱ)에서의 방정식을 활용하여 매질과 진공사이에서 자기장이 만족해야 하는 경계조건을 유도하라.

(ㄷ) 아래 그림과 같이 원래 균일한 자장 ($\vec{B} = B_0 \hat{i}$ 라 놓을것)이 있던 region에 그 자장에 수직되게 반경 a인 실린더형 매질 (투자율 μ)을 넣었다고 하자.



이때 실린더형 매질 내부에서의 자기장을 구하라. 여기서 주어진 매질을 infinite 실린더로 봐도 좋다. (참고: magnetic scalar 포텐셜 ϕ를 생각하고 원통좌표계에서 Laplace 방정식 $\nabla^2\phi(\rho,\theta) = 0$의 일반해는

$$\phi(\rho,\theta) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})(\cos n\theta + C_n \sin n\theta)$$

(여기서 $\rho\cos\theta = x$, $\rho\sin\theta = y$)

임을 활용할수 있음.)

3. (ㄱ) 물리현상을 기술하는데 우리는 각각의 event를 (x, y, z, ct)로 나타내는 시공간에서의 어떤 점(点)과 연관시킨다. 여기서 두 좌표계간 Lorentz 변환이란 어떤 것을 두고 말하는지 간단히 논의 하라.

(ㄴ) 일반적으로 Lorentz 4-vector란

(전기역학 계속)

어떤 양을 뜻하는지 말하고 속도 vector $\vec{v}$ 를 써서 velocity Lorentz 4-vector 를 만들어라.

(ㄷ) 전장과 자장, 즉 $\vec{E}(\vec{x},t)$ 와 $\vec{B}(\vec{x},t)$ 는 함께 (rank-2) Lorentz tensor field를 만든다. 어떻게 만드는지 명시한 다음 그 tensor form을 써서 Lorentz 변환에 대해 $\vec{E}, \vec{B}$ 가 어떻게 바뀌는지 말하라.

(ㄹ) 위 (ㄴ)과 (ㄷ)을 참조하여 Lorentz force law

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$$

를 manifestly Lorentz-covariant 한 형태로 표시하여 보아라.