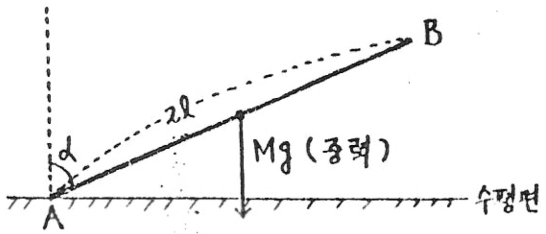
물리학과 대학원 자격시험 I

고전역학

1986. 8. 30.

1. (35점 만점) 그림과 같이 길이가 $2l$ 이고 질량 M인 균일한 막대의 한쪽끝(A)을 수평면에 닿게하고 막대가 연직선과 α의 각을 이룬 위치에 있을때 정지상태에서 가만히 놓았다.



(t=0 에서의 막대 위치)

수평면에 접하는 끝(A)이 상하나 수평방향으로 움직임이 없는 경우에

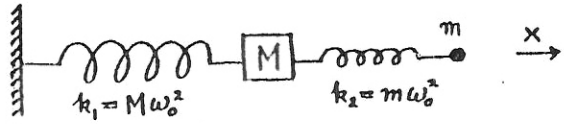
(ㄱ) 막대가 연직선과 각 θ를 이룰때 각속도를 θ의 함수로 표시하라. 또 다른 한쪽 끝(B)이 수평면에 닿는 순간에 그 점이 갖는 속력은?

(ㄴ) A점에서 수평면이 막대에 주는힘(수직항력과 정지마찰력으로 나눠 생각할 것)을 θ의 함수로 표시하라.

위 문제에서 만약 수평면과 막대사이의 마찰력이 없어서 (즉 아주 무시해도 좋은 경우) A점의 수평운동까지 고려한다면 이 때

(ㄷ) 막대의 다른끝 B가 수평면에 도달할때의 B점의 속력을 구하라.

2. (35점 만점) 그림과 같이 질량이 M과 m으로 주어지는 두개의 물체가 (여기서 $M \gg m$) 용수철로 연결되어 있는 1차원계를 생각하자.



용수철의 왼쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 물체의 변위는 수평방향 즉 x축상에 (그림 참조) 국한되어 있다. 용수철 상수는 각각 $M\omega_0^2$, $m\omega_0^2$ 이며 물체 M과 m이 벽에서 $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$의 거리에 있을때 이 계는 평형상태에 있다고 하자.

(ㄱ) M 및 m의 평형점에서 부터의 변위를 x_1, x_2로 표시할 때 이들을 generalized coordinate로 해서 이 계에 대응하는 Lagrangian을 쓰고 또 그로부터 운동방정식을 구하라.

(ㄴ) 이 계의 고유진동수를 $\frac{m}{M}$의 lowest non-trivial order 까지 얻고 또 같은 근사내에서 각 고유진동수에 대응하는 고유진동형(normal mode)을 구하라.

(ㄷ) 원래 평형상태에 있던 계를 $t=0$ 순간에 질량 M인 물체에 충격 I_0를 가해서 진동을 시작시키는 경우; 질량 m인 물체의 변위 x_2를 ((ㄴ)에서와 같은 근사내에서) 시간 t의 함수로 나타내라.

3. (30점 만점) 어떤 주어진 특수 상대론적

고전역학

(앞장에서 계속)

관성계에서 균일한 정전장 $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ ($E_0 > 0$ 이며 E_0는 시간에 무관한 상수)가 있을때 전하 q, 정지질량 m인 입자의 운동을 상대론적 역학을 써서 생각해보자.

(ㄱ) 이 경우 Newton 방정식 $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$ 를 대치할 상대론적 운동방정식은?

(ㄴ) (ㄱ)에서의 상대론적 운동방정식에 대응하는 Lagrangian을

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} - q\,\Phi(\vec{x})$$

$$(\ \Phi(\vec{x}) = -E_0 x\ )$$

로 표시할 수 있음을 보여라.

(ㄷ) 대응하는 Hamiltonian은? 이경우에 Hamiltonian은 보존되는 양 인가?

(ㄹ) 입자가 $t=0$ 순간에 정지상태에서 운동을 시작한다고 할때 속도 $\vec{v}$를 t의 함수로 구하라. 이때 $\lim_{t\to\infty} \vec{v}(t)$ 는?

물리학과 대학원 자격시험 I

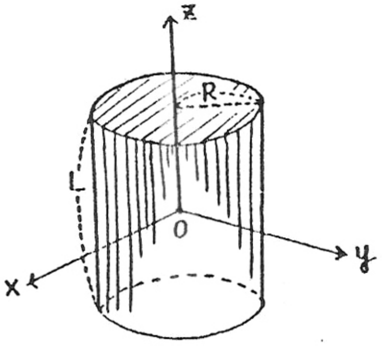
전기역학

1986. 8. 30

1. (40점 만점) 반경 R, 길이 L인 원주형의 영구자석이 있다 (그림참조). 자석의 중심은 좌표계의 원점에, 그리고 자석내에서 magnetization 은

$$\vec{M} = M_0 \mathbb{k}, \quad (M_0 \text{는 상수})$$

처럼 주어진다 하자.



(ㄱ) 자기장 $\vec{B}$ 가 원주안과 바깥에서 각각 만족하는 (Maxwell 의) 방정식을 써라.

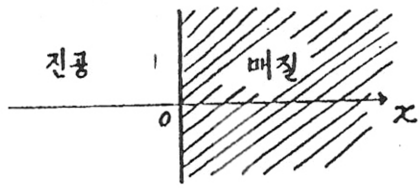
(ㄴ) (ㄱ)의 결과를 $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$ (CGS) (또는 $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ (SI))을 써서 바꿔쓰면 $\vec{H}$ 가 만족하는 식은 마치 전하 ρ_m 가 있는 경우의 정전기장 $\vec{E}$ 가 만족하는 식과 같이 됨을 보여라. 이때 ρ_m 은 어떻게 표시되는가?

(ㄷ) 원주안에서의 자기량 밀도 (magnetic pole density) ρ_m 및 자석 표면에서의 자기량 표면밀도 σ_m 을 구하라.

(ㄹ) 원주 축상 (즉 $x=y=0$, 그러나 z 값은 임의)에서 $\vec{H}$ 를 계산하라.

(ㅁ) 원주 축상에서 $\vec{B}$ 는 어떻게 주어지는가? 결과에서 $\vec{B}$ 및 $\vec{H}$ 의 (z 의 함수로서) 연속성을 논하라.

2. (40점 만점) 전기 전도도 σ 를 지닌 매질이 그림과 같이 $x=0$ 평면을 경계로 진공과 접하고 있다.



여기에 x 방향으로 전자기파가 입사한다고 할때,

(ㄱ) 이 파의 전기장 $\vec{E}$ 는 매질내에서

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(CGS 단위)

을 만족함을 보여라 (SI 단위로 대응되는 결과를 도출해도 무방하다).

(ㄴ) 매질 내에서 전기장 $\vec{E}$ 가 시간 t 와 위치 x 의 함수로 $\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ 의 형태를 가질때 $k = k_R - i k_I$ (k_R, k_I 는 각각 실수)는

$$k_R^2 - k_I^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu, \qquad 2k_R k_I = \omega\mu\sigma\frac{4\pi}{c^2} \quad \binom{CGS}{\text{단위}}$$

을 만족함을 보여라.

(ㄷ) 매질의 전기전도도가 입사한 전자기파의 진동수에 비하여 충분히 크다고 할때 ($\sigma \gg \epsilon\omega$) 전기장 $\vec{E}$ 의

물리학과 대학원 자격시험 I

전기역학

1986. 8. 30.

(앞장에서 계속)

세기가 e^{-1} 로 감쇄되는 위치 x_0 (skin depth) 를 구하라.

(ㄹ) 이 경우 ($\sigma \gg \epsilon\omega$) 이 전자기파의 위상속도 (phase velocity) 는 매질 내에서 $\sqrt{\frac{c^2\omega}{2\pi\mu\sigma}}$ 로 표시됨을 보여라. (CGS 단위)

3. (40점 만점) 전하 e 를 갖는 입자가 (비상대론적) 가속운동을 할때 복사능 (radiation power loss) 은

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\vec{v}}|^2 \quad (\text{: Larmor 의 공식})$$

와 같이 주어진다.

(ㄱ) 고전적 모델을 사용할때 수소원자는 전하 $-e$ 를 가진 전자가 전하 $+e$ 인 양성자 주위를 원운동하고 있는 계로 비유된다. 이 모델에서 전자의 궤도 반경이 0.5×10^{-8} cm 에서 양성자에 collapse 하게 될때까지 소요되는 시간을 estimate 하라.

(ㄴ) 입자의 고전적 운동방정식에 복사감쇄 (radiation damping) 효과를 고려하기 위하여

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{rad}$$

(여기서 $\vec{F}_{ext}$ 는 외력)

처럼 쓴다고 할때 Larmor 의 공식과 맞는 결과를 얻기 위해서는 $\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}}$ 가 되어야 함을 보여라. [※ quasi-periodic orbits 에 국한해서 생각할 것.]

(ㄷ) 전하 e 인 입자가 스프링 상수 $m\omega_0^2$ 인 스프링에 매달려서 일차원 운동을 할때 이 입자의 변위를 복사감쇄 (radiation damping) 효과를 고려해서 기술하라. [단 $\omega_0\tau \ll 1$ (여기서 $\tau = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}$) 의 조건을 가정하고, perturbation 방법을 써도 좋다.]

4. (30점 만점) 전하 밀도를 $\rho(\vec{x})$, 전기장을 $\vec{E}(\vec{x})$ 로 표시할때 정전기장의 기본 방정식을

$$A : \boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')\,(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}$$

처럼, 또는 미분형으로

$$B : \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \;,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

와 같이 나타낸다.

(ㄱ) 전기장이 "A" 처럼 주어지면 그것은 "B" 에 주어진 방정식들을 만족함을 보여라.

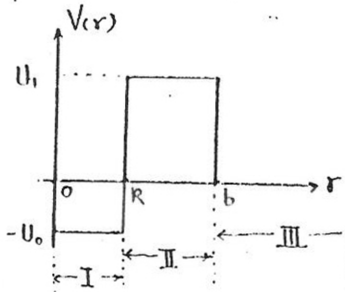
(ㄴ) 전기장이 "B" 에 주어진 방정식들을 만족한다면 그 해는 반드시 "A" 가 됨을 보여라.

양자역학

1986. 8. 30

1. (40点) Central potential $V(r)$ 이

$$V(r)=\begin{cases} -U_0, & 0<r<R \\ +U_1, & R<r<b \\ 0, & b<r \end{cases}$$



처럼 주어졌을 때 그 속에 에너지 E 를 갖는 입자를 생각하자. 여기서 에너지 E 는 $0<E<U_1$ 의 범위 안에 있다.

ㄱ). 이 입자가 만족하는 양자역학적 파동 방정식을 세리. 각운동량 양자수 $l=0$ 일 때 파동함수의 r-dependent part를 $\psi(r)=\frac{1}{r}u(r)$ 처럼 놓았을 때 $u(r)$ 이 만족하는 방정식은 ?
(다음 질문에선 모두 $l=0$ 즉 s-wave 경우만 생각한다)

ㄴ). 각 영역 I, II, III 에서 가능한 $u(r)$ 의 함수꼴을 쓴 다음, 입자가 $r<R$ 쪽에서 포텐셜 장벽($R<r<b$)을 향해서 입사할 때에 투과율을 계산하라. ($\frac{\sqrt{2m(U_1-E)}}{\hbar}(b-R)\gg 1$ 이라고 가정할 것.)

ㄷ). (ㄴ)의 결과를 이용해서 입자가 단위 시간 당 (영역 I 안에 포텐셜 장벽에 의해 거의 갇혀 있는 상태에서) 밖으로 나올 확률을 구하라.

2. (30点) ㄱ). Heisenberg 불확정성원리의 내용 및 그것이 갖는 물리적 의미를 간단히 밝히라.

ㄴ). 불확정성 원리를 양자역학의 기본 Commutation relation (일차원 경우) $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ 와 연관지어서 설명해 보아라.

3. (40点) 헬리움 원자는 핵($Z=2$)과 두개의 전자로 구성되어 있는데 이 계를 양자역학적 관점에서 생각해 보자. 단, 핵은 구조가 없는 point charge로 간주하고 spin-orbit interaction은 무시하라.

ㄱ). 핵이 정지해 있는 좌표계에서 두 전자계에 대한 Hamiltonian을 쓰고 각 항들을 간단히 설명하라.

ㄴ). 핵과 전자와의 상호작용만을 고려하였을 때 바닥상태의 파동함수와 에너지 고유값을 구하라. (두 전자의 spin 상태를 명시할 것)
단, 수소 유형 원자의 경우 전자의 에너지 고유값은 $E_n=-\frac{Z^2R_H}{n^2}$

($R_H=\frac{me^4}{2\hbar^2}$: Rydberg 상수) 이고 그에 해당하는 공간파동함수는 $\phi_{nlm}(\vec{r})$ 로 표시할 것. (여기서 n은 주양자수, l은 궤도양자수, m은 자기 양자수이다.)

ㄷ). (ㄴ)과 같은 가정아래 첫 들뜬상태의 파동함수와 에너지 고유값을 구하라. (두 전자가 모두 $l=0$ level에 있는 경우만 고려하라.)

ㄹ). (ㄷ)의 경우에 전자와 전자 사이에 상호작용을 perturbation (1st order) 이론을 써서 고려하면 spin-triplet 상태의 에너지 값과 spin-singlet 상태의 에너지 값사이에 얼마만큼 차이가 나는지 말하라. (적분형으로 나타내면 충분하다.) 어느상태가 더 작은에너지를 갖는가?

물리학과 대학원 자격시험 I

양자역학

1986. 8. 30

4. (40点) Stern-Gerlach (SG) type 실험을 아래 그림 1 과 같이 가마(oven)에서 나온 Ag 원자가 y 방향으로 움직일 때 그 진로의 세 곳에 SG 자석을 설치하여 실시하였다 하자. Ag 원자는 spin $\frac{1}{2}$ 입자로 생각하고, 그림에서 SG 1 과 SG 3 의 자석축 방향은 같고 (z 방향), SG 2 의 자석축의 방향 (z' 방향)은 z 축을 y 축 주위로 θ 만큼 돌렸을 때 가리키는 방향이라고 하자.

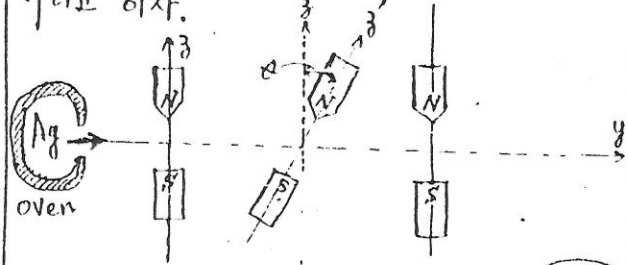


그림 1

ㄱ). SG1 장치를 통과한 Ag 원자의 스핀방향은 z 방향과 $-z$ 방향으로 갈라지는데 그 상태를 $|\frac{1}{2}, m_s ; z\rangle$ (여기서 $m_s = \pm\frac{1}{2}$)로 표시하자. 같은 표시법을 써서 SG2를 통과한 경우 스핀 고유상태를 $|\frac{1}{2}, m_s' ; z'\rangle$ 라고 할 때, $|\frac{1}{2}, m_s ; z\rangle$를 $|\frac{1}{2}, m_s' ; z'\rangle$ 의 선형결합으로 나타내라.

ㄴ). SG 장치를 통과한 Ag 원자의 두 상태 중 어느 한쪽상태를 막는 filter를 생각하자. 예를 들어 $-\frac{1}{2}$인 상태를 막는 filter를 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\,\blacksquare \end{pmatrix}$라 표시할 때, 그림 2 에서와 같이 filter 들을 설치한다면 SG1을 통과한 Ag 원자가 SG3를 통과할 확률은 얼마인가? (단, 자석의 영향에 기인한 Ag 원자의 진로 변화나 에너지 값에 주는 변동은 무시해도 좋을 정도라고 생각할 것.)

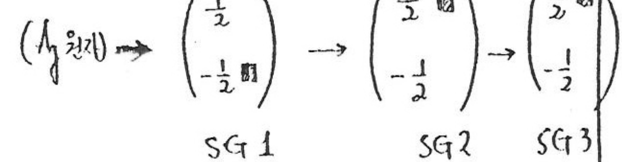


그림 2

ㄷ). 그림 2 의 경우 SG2 에 장치된 filter를 제거하면 (SG2 장치는 계속 놓아둔채), SG1을 통과한 Ag 원자가 SG3를 통과할 확률은 어떻게 주어지는가? 또 이 경우 나온 확률이 (L)에서 주어지는 확률보다 어떻게 해서 더 작은 값을 갖을 수 있는지 설명하라.