

물리학과 대학원 자격시험 I
과목명(力学)

1988. 8. 20.

문제

1). 질량 m 의 입자가 중심력 $F = -c^2 \frac{r}{r^{5/2}}$ 을 받고 운동하고 있다.

가) 포텐셜 에너지를 계산하라.

나) 이 계의 라그랑지안을 spherical coordinate 로 기술하고 운동방정식을 유도하라.

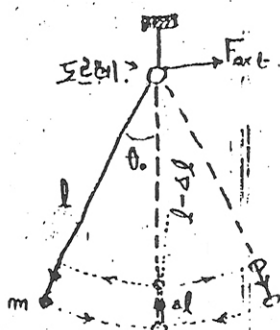
다) 이 입자가 원궤도 운동을 하는 경우 궤도 반경을 각운동량으로 나타내고 또 주기를 구하라.

라) Radial 운동방정식에 대한 effective 포텐셜 곡선을 그려보라.

마) (다)의 원궤도에 perturbation 이 생겼을 경우 small radial oscillation 이 일어난다. 이 진동에 대한 frequency 를 구하라.

문제

2).



질량 m 의 질량과 무게 없이 길이 l 의 실로 구성된 진자가 초기각도 θ_0 , 초기속도 $v_0 = 0$ 에서 진동을 시작하였다.

그림에서처럼 운동을 하는 동안 실의 길이는 수직이 된 위치에서 Δl (Δl 만큼 짧게되고 θ 가 $\pm \theta_{max}$ 일때 원래의 길이 l 로 복귀된다.

가) 외력 F_{ext} 가 한 주기동안 진자에 해 준 일의 양은 얼마인가?
(Hint, positive)

나) (가)에서의 결과에 의하면 외력에 의하여 에너지가 공급되므로 진자의 진폭은 시간에 따라 증대한다. 또한 진자의 진동수도 변화한다.

이때 진동수 ω , 진폭 θ 의 시간 t 에 대한 변화를

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + h \cos[(2\omega_0 + \epsilon)t])$$

$$\theta = e^{st} \left\{ a \cos[(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t] + b \sin[(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2})t] \right\}$$

로 나타낸다고 하면, (단: $h \ll 1, \epsilon \ll \omega_0$)

나-1) 이 진자의 운동방정식을 기술하라

나-2) h, ϵ 한에는

$$-\frac{1}{2} h \omega_0 < \epsilon < \frac{1}{2} h \omega_0$$

의 관계가 성립함을 증명하라.

(hint; ϵ, h, s 는 모두 작은 상수 이므로 일차항 만 고려할 것)

물리학과 대학원 자격시험 I

과목명 (전기역학)

1998. 8. 20.

[1] 전기전도도가 σ (즉 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\vec{j}$ 는 current density) 인 매질 내에 진동수 ω 인 전자기파가 x 방향으로 진행한다. 단 이 매질내에서 $\sigma \gg \epsilon \omega$ 이 성립한다고 하자.

(가) Maxwell 방정식을 이용하여 이 파의 전계장 $\vec{E}$ 는 시간 t , 위치 x 의 함수로

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i\omega t - (1-i)\sqrt{\frac{2\pi\omega\sigma\epsilon}{c}} x] \quad (\text{gaussian, cgs 단위제})$$

$$\text{혹은 } \vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i\omega t - (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} x] \quad (\text{SI 단위제})$$

로 주어짐을 보이라. 여기서 ϵ 와 μ 는 투자상수와 투자율을 나타낸다.

(나) 이 매질 내의 단위체적에서 단위 시간당 발생하는 열량 P 을 위치 x 의 함수로 표시하라.

(다) 매질 내의 임의의 체적 V 내에서 단위시간당 열로 소모되는 에너지 W 는 일반적으로

$$W = -\frac{c}{4\pi} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (\text{cgs})$$

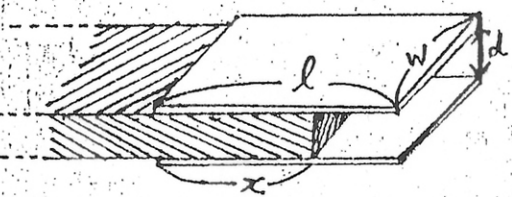
$$\text{혹은 } W = - \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad (\text{SI})$$

로 표시됨을 보이고 각 항이 지닌 물리적 의미를 말하라.

(여기서 편적 vector $\vec{S}$ 는 체적 V 을 둘러싼 면에 수직임). 단 $\vec{E}$ 와 $\vec{D}$, 그리고 $\vec{B}$ 와 $\vec{H}$ 는 각각 비례함 (즉 ϵ 와 μ 는 scalar임).

[2] 길이 l , 폭 w 인 두꺼운 평행판 도체판 사이에

두께 d 이고 투자상수 ϵ (단 여기서 cgs로 ϵ 가 혹은 SI로 $\epsilon > \epsilon_0$ 이다) 인 얇은 절연판이 x 지점까지 ($0 < x < l$) 일부분 끼어있고 나머지는 진공이다. 단 가장자리에서 전계가 굽는 효과 (edge effect) 는 무시하기로 한다.

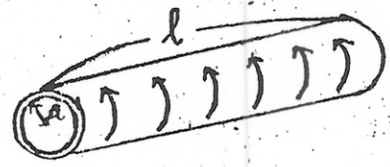


(가) 두 개의 도체판에 전하 Q 및 $-Q$ 를 각각 주었다. 두 도체판 사이의 전위차는 얼마나 되는가?

(나) 이때에 절연판이 받는 힘의 방향과 크기는?

(다) 이때에 도체판이 순전히 정전기력 (동역은 무시하고) 에 의해 절연판을 누르는 힘 (접촉 포텐셜 수직방향의 성분) 의 크기는?

(라) 만약 외부에서 전지를 연결하여 두 도체판 사이의 전위차를 V 로 유지시킨다고 할때 절연판이 받는 힘의 방향과 크기는?



[3]

축이 긴 대단히 긴 ($l \gg a$) 원통 모양의 도체에 전류가 외부장이 균일하게 흐르고 있고 총전류는 I 이다. 이때 cgs 단위도 $\epsilon = \mu = 1$ (SI로 $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$) 이고 edge effect 는 무시하기로 한다.

(가) 이 원통에 저장된 자장의 에너지 E_m 은?

(나) 이 원통의 self-inductance L 은?

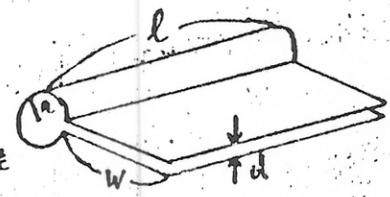
(다) 이 원통 옆면에 길이도 같은 홈을 파내고 그림과 같이 평행판

유전기를 붙였다.

이것을 하나의 resonant cavity로

볼때 resonance frequency

ω 를 구하라.



(라) 위의 (가), (나), (다)에서 $a = 1 \text{ cm}$, $l = 10 \text{ cm}$,

$I = 1 \text{ Ampere}$, $w = 2 \text{ cm}$, $d = 0.1 \text{ cm}$ 라고 하면

E_m 은 몇 에르그 인 L 은 몇 Henry 인가? ω 는 몇 Hertz 인가?

물리학과 대학원 자적시험 I

과목명(양자역학)

1998. 8. 20.

1. 스핀 1/2 인 계의 스핀 matrix
 S_x, S_y, S_z 는 각각 다음과 같다고 하자.
 $S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}, S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}, S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$

(a) 연산자 (operator) $S_x + S_y$ 의 고유치 (eigen value) 와 고유벡터 (eigen vector) 를 구하라.

(b) 이 연산자를 측정할 경우 측정값중에서 큰 값에 해당되는 고유벡터 상태가 우리가 고려하는 계라면 이 계에서 S_z 를 측정할 값이 $\frac{\hbar}{2}$ 가 될 확률은 얼마인가.

2. 정삼각형의 세 꼭지점에 같은 종류의 세 원자가 각각 위치하여 구성된 한 분자를 M 이라고 하고 이 분자 M 내의 어느 한 원자에 외부로부터 온 전자 하나가 에너지 E_0 를 가지고 결합되어 있는 음이온분자 M^- 에 대해 생각하자. 이때 이 전자가 한 원자에서 다른 원자로 두각하는 amplitude 가 존재하고 이로 인한 Hamiltonian matrix elements 가 $H_{12} = H_{13} = H_{23} = \epsilon$ 이다.

(a) 이 음이온분자 M^- 의 정상상태 에너지들을 결정하는 방정식을 쓰고 에너지 준위들을 E_0 와 ϵ 으로 표시하라.

(b) 세 원자중 하나를 다른 종류의 원자로 치환하였더니 이 치환된 원자에 전자가 결합하는 에너지는 $E_0 + \Delta E$ 로 증가하였다. 이때 ϵ 은 변화하지

않았다고 가정하고 $\Delta E \gg |\epsilon|$ 인 경우의 에너지 준위들을 (ϵ 의 1차항까지) 모두 구하라.

3. 일차원 조화진동자의 하밀토니안과 에너지 고유치는 각각

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2,$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

이다.

(a) 질량 m_1, m_2 인 두 입자로 이루어진 계에서 이들이 각각 스프링상수 k_1 과 k_2 에 해당되는 조화포텐셜의 영향을 받고 운동한다고 할때 이 계를 기술하는 Schrödinger 방정식을 써라.

(b) 이 두 입자계가 가지는 에너지는 어떻게 되겠는가.

(c) 두 입자가 동일한 입자이고 같은 모양의 조화 포텐셜, $k_1 = k_2 = m\omega^2$ 의 영향을 받고 있다면 에너지가 $E = (n+1)\hbar\omega$ 인 상태의 수 (degeneracy) 는 얼마인가?

(d) (c) 문제는 2차원에서 질량 m , 각속도 ω 를 갖는 한 입자의 운동으로 생각할 수 있다. 이때 각운동량 연산자 $L = (x_1 p_2 - x_2 p_1)$ 은 운동의 함수 (constant of motion) 임을 보이라.

(e) L 의 고유치는 $m\hbar$ 모양을 가지며 이때 양자수 m 은 $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, -m$ 이 됨을 보이라. (단 n 은 (c)에서 구한 에너지 양자수임.)

(힌트: 연산자 $a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p_i$ (i=1,2)

$$\text{라 할때 } a_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + i a_2)$$

$$a_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - i a_2) \text{ 로}$$

H 와 L 을 표시하여 보이라.)