제18회 물리학과 대학원 자격시험 I

교과목 : 고전역학 1989. 3. 4.

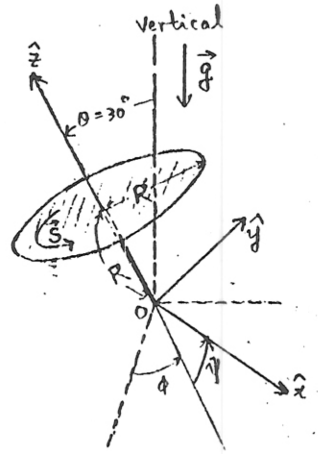
1. 그림과 같이 질량이 m인 입자 세개가 평형상태에서의 길이가 각각 l_0, 탄성계수가 k인 세개의 동일한 용수철(spring)에 의해 원둘레 위에서만 운동하도록 연결되어 있다. 원둘레의 길이는 $3l_0$로 평형상태의 용수철들의 길이의 합과 같고, 이 계에 작용하는 힘은 용수철 들에 의한 힘 뿐이다.

(1) 적당한 일반화 좌표계(generalized coordinate)를 선택하여 이 물체들의 운동을 나타내는 Lagrangian을 구하라.

(2) 미소 진동을 할때, 진동의 Normal mode 와 그에 대응하는 고유진동수를 구하라

(3) 기준좌표(Normal coordinate)와 이 좌표계에서의 Lagrangian을 쓰라.

2. 질량이 M, 반경이 R인 원판(두께는 무시할 만큼 얇음)의 중앙에 질량을 무시할수 있는 길이 R인 막대가 이 원판에 수직으로 달려 있는 팽이가 있다. 이 팽이가 막대를 회전축으로 $\vec{S} = S\hat{z}$의 각속도로 회전하고 있으며, 이 회전축은 연직방향(지구의 중력장 $\vec{g}$의 방향)과 30° 각도로 기울어져 있고 회전축의 한끝은 항상 원점 O에 있다.



(1) 팽이의 관성능률 텐서(moment of inertia tensor)를 구하라(좌표를 명기할 것)

(2) 팽이에 대한 Euler의 운동방정식을 쓰라.

(3) 팽이는 연직방향(vertical)을 중심축으로 하여 세차운동을 한다. S가 이 세차운동의 각속도 보다 매우 클때, 세차운동의 주기 T를 구하며 M, R, g 및 S로 표시하라.

제 18 회 물리학과 대학원 자격 시험 I

과목명: 전기 역학 1989. 3. 4.

참고: 맥스웰 방정식

$$\nabla\cdot\vec{D} = 4\pi\rho_f, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = 4\pi\vec{J}_f + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

혹은 SI 단위계로

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

여기서

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

벡터 관계식

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$$

상대론

평행한 속도의 합성 $\beta = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$

힘의 변환

$$\vec{F}_\perp = \gamma\vec{F}'_\perp + \frac{\gamma}{c^2}[\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{F}')]_\perp$$

$$\vec{F}_\parallel = \vec{F}'_\parallel + \frac{\gamma}{c^2}[\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{F}')]_\parallel$$

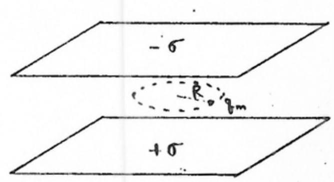
($\vec{F}$: 입자의 속도 $\vec{u}$인 좌표계 K에서의 힘
$\vec{F}'$: K에 대해 $\vec{v}$로 움직이는 좌표계 K' 에서의 힘)

1. (가) 대전되지 않은 균질한 물질 (ϵ, μ 및 σ는 상수)에서 전자기파의 파동 방정식을 $\vec{E}$ 또는 $\vec{H}$에 대해서 구하고, 그로 부터 절연체 ($\sigma=0$) 내에서 진행하는 전자기파의 위상 속도 v를 구하라.

(나) 대전되지 않은 균질한 절연체에서 $\hat{n}$ 방향으로 진행하는 파동 방정식의 해는 $\vec{E} = \vec{E}_0 f(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt)$ 및 $\vec{H} = \vec{H}_0 g(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt)$로 주어진다. ($\vec{E}_0$ 및 $\vec{H}_0$는 상수 벡터이고 f와 g는 $(\hat{n}\cdot\vec{r}-vt)$를 변수로 가지는 임의의 함수이다.) 전기장 $\vec{E}$, 자기장 $\vec{H}$ 및 진행 방향 $\hat{n}$은 서로 수직임을 보이고 그 사이의 벡터 관계를 구하라.

(다) 자기 홀극 (magnetic monopole)이 존재한다면 맥스웰 방정식을 어떻게 고쳐써야 하는가?

(라) 자기량 (magnetic charge) g_m, 질량 m인 자기 홀극이 표면 전하 밀도 (surface electric charge density) σ로 충전된 축전기 내에서 전기장과 수직인 평면에서 일정한 속력 v로 원운동한다고 할 때 이 원운동의 반경 R을 구하라.

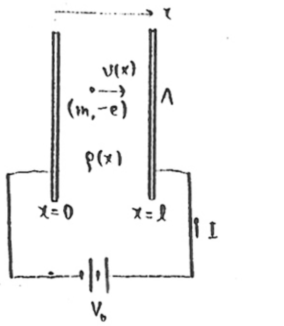


(다음 장에 계속됨)

제 18회 물리학과 대학원 자격시험 I

과목명: 전기 역학 1989. 3. 4.

2. 넓이 A, 간격 l인 두 개의 평행한 금속판에 정전 전위차 V_0을 가하여 음극판에서 튀어 나온 전자들에 의해 전류 I가 흐른다. 금속판 사이는 진공이고 임의의 점에서 정전 전위는 $V(x)$로 x에만 의존하며, 전하 밀도는 $-\rho(x)$, 전자의 속도는 $v(x)$라 하자. 정상 상태에서 경계조건들은 $V(0)=0$, $V(l)=V_0$ 및 $v(0)=0$, $E(0)=\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=0}=0$ 이다.



(가) 정상 상태에서 아래 조건들에 해당하는 방정식을 쓰라.

(a) 포아송 (Poisson) 방정식

(b) 전류의 연속 방정식

(c) 각 전자에 대한 에너지 보존

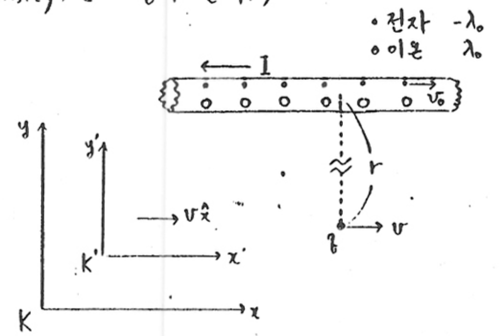
(나) (가)의 방정식들로 부터 정전 전위 $V(x)$가

$$\frac{dV}{dx} \propto \sqrt{I}\, V^{\frac{1}{4}}$$

의 관계를 만족시킴을 보여라.

(다) $V(x)$를 구하고 전류 I와 전위차 V_0의 관계를 구하라.

3. 정지 좌표계 (lab frame) K에서 무한히 긴 도선에 전류 I가 $-x$ 방향으로 흐르고 있다. 이 도선에서 충분히 먼 거리 r에 시험 전하 (test charge) q가 $v\hat{x}$의 속도로 운동하고 있다. 도선은 대전되어 있지 않다.
(전류는 정지 좌표계에서 전하 선밀도 (line charge density) $-\lambda_0$인 전자들이 일정한 속도 $v_0\hat{x}$으로 운동하기 때문에 생기는 것이며, 도선에는 선밀도 λ_0인 정지해 있는 이온들도 존재하므로 그 알짜 선밀도 (net line charge density)는 영이 된다.)



(가) 정지 좌표계 K에서 시험 전하가 받는 힘 F를 구하라.

(나) 정지 좌표계 K에 대해 일정한 속도 $v\hat{x}$으로 움직이는 좌표계, 즉 전하 q가 정지해 있는 좌표계 K'에서 도선의 알짜 선밀도 λ'을 상대론적 논의로부터 구하라.

(다) K'에서 이 전하 q가 받는 힘 F'을 구하라.

(라) (다)에서 구한 힘 F'을 정지 좌표계 K로 변환시키고 그 결과를 (가)에서의 힘 F와 비교하라.

제18회 물리학과 대학원 자격시험 I

과목명 : 양자물리학 1989. 3. 4

문제 1)

포텐셜이 다음과 같이 주어진 2차원 상자속에 질량이 m인 입자가 들어 있다.

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & |x|\leq L,\ |y|\leq L\\ \infty & \text{그외의 모든 } x,y\end{cases}$$

(가) 바닥상태(ground state)와 첫 들뜬상태(first excited state)의 에너지 고유값과 고유함수를 구하라

(나) 해밀토니안이 H인 계의 바닥 상태 에너지를 E_0라고 하면, 임의의 상태 $|\psi\rangle$에 대하여 일반적으로

$$\frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\geq E_0$$

임을 보여라.

(다) 시행함수(trial function)를

$$\psi(x,y)=(L^{\lambda}-|x|^{\lambda})(L^{\mu}-|y|^{\mu})$$

로 택하고, (나)의 결과에 의한 변분방법(variational method)을 이용하여 입자의 바닥상태 에너지를 구하라. (단 λ, μ는 임의의 변수이다.)

문제 2)

에너지가 각각 E_1, E_2인 두 양자 상태 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$를 가지는 계의 해밀토니안은

$$H_0=E_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|+E_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$$

로 표시할수 있다. 섭동(perturbation) V가 이 계에 작용하여, 해밀토니안이

$$H=H_0+V$$

로 주어지고,

$$\langle\psi_1|V|\psi_1\rangle=\langle\psi_2|V|\psi_2\rangle=0$$

$$\langle\psi_1|V|\psi_2\rangle\equiv\Delta$$

의 관계를 갖는다: 단 Δ는 시간에 무관한 실수이다.

(가) 계의 에너지 고유값을 구하라.

(나) 시간 $t=0$에서 $|\psi_1\rangle$의 상태에 있는 계가 시간 $t>0$에서 $|\psi_2\rangle$의 상태로 될 확률 $P(t)$를 구하라.

(다) $|E_1-E_2|>>\Delta$ 일때, 시간에 무관한 섭동이론을 이용하여 에너지 고유값을 Δ의 2차항까지 구하고, 이를 (가)의 결과와 비교하라

(라) $|E_1-E_2|>>\Delta$ 일때, 시간에 의존하는 섭동이론을 이용하여 $P(t)$를 Δ의 2차 항까지 구하고, 이를 (나)의 결과와 비교하여라.

제18회 물리학과 대학원 자격시험 I

과목명 : 양자물리학 1989. 3. 4

문제3)

수소원자내의 전자가 에너지가 E_i인 들뜬상태 $|i\rangle$에서, 에너지가 E_f인 바닥상태 $|f\rangle$로 자발적 전이(spontaneous transition)를 일으킬 때 광자가 방출된다. 단위시간에 광자가 입체각 $d\Omega$로 방출되는 전이가 일어날 확률은

$$d\Gamma = \frac{e^2\omega}{2\pi m^2 \hbar c^3}\left|\langle f|\vec{p}|i\rangle\cdot\vec{\varepsilon}\right|^2 d\Omega \qquad (식\ 1)$$

이다. 여기서 ω는 광자의 각진동수, $\vec{\varepsilon}$은 편극(polarization)벡터, $\vec{p}$는 전자의 운동량, m은 전자의 질량이고, $\hbar\omega = E_f - E_i$ 이다.

(가) 수소원자의 전자가 핵과 쿨롱(Coulomb) 인력을 가져서, 그 해밀토니안이

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(r) \qquad (식\ 2)$$

일때,

$$[H, \vec{x}] = -i\frac{\hbar}{m}\vec{p} \qquad (식\ 3)$$

가 됨을 보여라. $\vec{x}$는 전자의 위치 벡터이고, $|\vec{x}| = r$ 이다.

(나) 식(1)과 (3)을 이용하여

$$d\Gamma = \frac{e^2\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\langle f|\vec{x}|i\rangle\cdot\vec{\varepsilon}\right|^2 d\Omega$$

가 됨을 보여라

(다) 전이가 일어날 전체 확률(total transition probability)을 구하라.

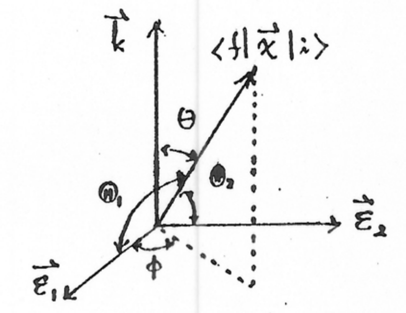
(라) $|i\rangle$와 $|f\rangle$의 양자상태를 각각 $|l_i, m_{l_i}, m_{s_i}\rangle, |l_f, m_{l_f}, m_{s_f}\rangle$라 하면, 전이가 일어날 조건(selection rule)이 다음과 같이 주어짐을 보여라. (단. l, m_l, m_s는 각운동량, 자기각운동량, 스핀의 양자수이다.)

$$l_f = l_i \pm 1$$

$$m_{l_f} = m_{l_i}\ ,\ m_{l_i} \pm 1$$

$$m_{s_f} = m_{s_i}$$

(참고)



$\cos\Theta_1 = \sin\theta\cos\phi$

$\cos\Theta_2 = \sin\theta\sin\phi$