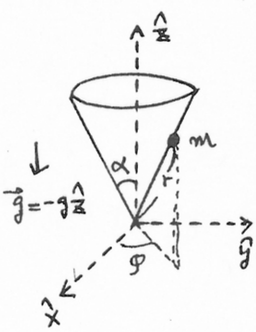
# 제 22 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 ( 역학, 전자기 )　　　　　　　　　　　1991. 1. 25.

## 역　　학

1. 그림과 같이 질량 m 인 입자가 중력가속도 $\vec{g} = -g\hat{z}$ 의 영향아래 원추면 위에서만 운동을 하고 있다.




가) 구 (球) 좌표계를 이용하여 이 입자의 Lagrangian 을 쓰고 입자의 운동 방정식을 구하라.

나) 입자의 에너지 E 및 z - 축 방향의 각운동량 Lz 를 r 및 $\dot{r}$ $\left(= \frac{dr}{dt}\right)$ 의 함수로써 구하라. 여기서 유효 포텐셜 (effective potential) V* 를 정의하고 V*(r) 을 r 에 대한 함수로 Graph 를 그려라.

다) 이번에는 원추면과 입자사이에 마찰이 존재하여 입자의 속력에 비례하는 마찰력 $\vec{F}_f = -k\vec{V}$ $(k>0)$ 을 입자가 받는다면, 입자의 운동 방정식이 (나)에서 구한 운동방정식에 비해서 어떻게 달라져야 하는가? 또한 Lz 는 시간에 따라 어떻게 변하는가?

2. 외부힘이 없이 각속도 $\vec{\Omega}(t)$ 로 빠르게 회전하는 공이 있다. 동시에 이공은 주기 $\omega$ 로 조화진동 ( harmonic vibration) 을 하고 있어서 (단 $|\vec{\Omega}| \gg \omega$) 이 공의 관성 능률이 body-fixed frame 에서

$$I_{zz} = I_0 (1 + \beta \cos \omega t)$$
$$I_{yy} = I_{xx} = I_0 \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos \omega t\right)$$
$$I_{ij} = 0 \quad \text{for all other components}$$

로 주어질때 다음 물음에 답하라. 여기서 $\beta \ll 1$ 이다.

가) 물체고정 좌표계 (body-fixed frame) 에서 각 축 방향의 각운동량의 변화 $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{b.f.}$ 를 구하라.

나) 공의 회전 각속도 $\vec{\Omega}$ 는 공의 harmonic vibration 때문에 시간의 함수가 된다. $\Omega_z(t)$를 $\beta$ 의 1차 항까지 구하면 $\Omega_z = \Omega_0 (1 - \beta \cos \omega t)$ 가 됨을 보여라.

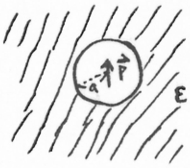
다) $\Omega_x$ 와 $\Omega_y$ 가 만족하는 식이 leading order 만을 고려하면

$$\frac{d\Omega_x}{dt} + \frac{3}{2} \Omega_0 \beta \Omega_y \cos \omega t = 0$$
$$\frac{d\Omega_y}{dt} - \frac{3}{2} \Omega_0 \beta \Omega_x \cos \omega t = 0$$

이 됨을 보이고, 이식에서 예측되는 공의 운동을 간단히 기술하라.
(Hint: $|\vec{\Omega}| \gg \omega$ 이므로 계산상에서 $\frac{dI_{xx}}{dt}$ 와 $\frac{dI_{yy}}{dt}$ 는 무시해도 된다.)

## 전자기학

3. 유전상수가 $\varepsilon$ 인 무한한 유전체 안에, 반경 a 인 구 (球) 모양의 구멍을 파내었다. 이 구의 중심에 electric dipole moment 가 $\vec{P} = P\hat{z}$ 인 point dipole 을 놓았을때 다음 물음에 답하라.




가) $a \to \infty$ 일 경우를 먼저 생각해 보자. Point dipole 에 의한 electrostatic potential 은 $\phi(\vec{r}) = \frac{P\cos\theta}{r^2}$ 로 주어짐을 보여라. ( $\theta$ : polar angle)

나) r = a 인 점에서 전기장 $\vec{E}$ 의 normal component($E_n$)와 tangential component($E_t$)에 대한 경계조건 (boundary condition) 을 구하라.

다) 위에서 얻은 결과들을 참고하여 모든 공간에서의 electrostatic potential $\phi(\vec{r})$ 을 구하라.
( r ≥ a 일때와 r < a 인 경우를 나누어 생각하라)

라) 만일 구의 표면에 uniform surface charge density $\sigma$ 에 해당하는 자유전자가 놓여 있으면, $\phi(\vec{r})$ 은 어떻게 바뀌나?
(Hint: Spherical coordinate 에서 azimuthal symmetry 를 갖는 Laplace equation 의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi(r, \theta) \sim R_l(r)\, P_l(\cos\theta)$$
where $R_l(r) = r^l$ or $r^{-(l+1)}$
and $P_l(\cos\theta)$ is Legendre Polynomial.)

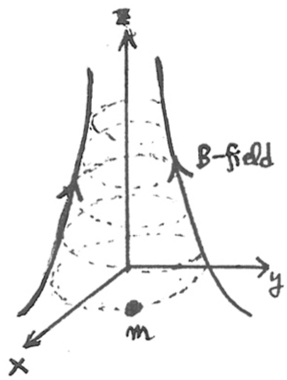
# 제 22 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 ( 역학 · 전자기 )　　　　　　1991. 1. 25.

4. z-방향의 성분이

$B_z = B_0 + \alpha z \ (B_0 > 0, \alpha > 0)$

로 주어지는 원통대칭형 (cylindrically symmetric) external static magnetic field 안에서 전하 $q\,(>0)$, 질량 m 인 입자가 z 축을 중심으로 나선형 궤도를 그리며 운동하고 있다. (오른쪽 그림 참조)




t = 0 일때 이 입자는 xy 평면상에 있으며 z 방향의 속력은 $v_z^0$, xy 평면상의 속력은 $v_{xy}^0$ 라고 하고, 이 입자는 상대론적인 운동을 한다고 할때 다음 물음에 답하라.

가) 자기장을 원통좌표계 ( $\rho$, $\phi$, $z$ ) 를 써서 기술할 때, Maxwell 방정식으로 부터 $B_\rho$ 성분을 구하라. ($B_\phi = 0$ 이다)

나) 이 입자의 속력 $|\vec{v}(t)| = \sqrt{[v_{xy}(t)]^2 + [v_z(t)]^2}$ 은 항상 상수임을 증명하라.

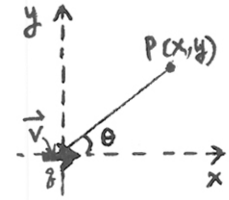
다) 시간 t 일 때의 입자위치의 z 좌표를 z(t) 라고 표시할 때 z(t) 의 운동 방정식을 세워라.

라) $v_z(t)$ 의 크기가 충분히 작으면, z 축 주위로 $2\pi$ 만큼 회전하는 동안 입자가 느끼는 $B_z$ 의 변화량은 작다고 볼 수 있다. 이때 그림과 같이 입자의 orbit 가 둘러 싸는 자력선속 (magnetic flux) 이 일정하다고 하면, z 방향의 가속도는 일정함을 보여라. 이 경우 입자가 z 방향으로 어떻게 운동할 것인지 간단히 기술하라.
(Hint: Cylindrical coordinate system 에서는

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

로 주어진다.)

5. 전하 q 를 갖는 point particle 이 x 축상에서 직선운동을 하고 있다. 이 입자가 원점을 지나는 순간, 관측점 P(x,y) 에서 측정되는 전자기장에 대하여 알아 보려한다.




가) 이 점전하가 속도 $\vec{V} = \vec{\beta}c$ 로 등속운동을 하고 있다면, P(x,y) 점에서의 전기장 $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ 는 전자기장의 Lorentz Transformation 을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 다음의 Tranformation 식을 이용하여 $E_x$, $E_y$ 를 구하라.

$$\vec{E} = \gamma(\vec{E}' + \vec{\beta}\times\vec{B}') - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')$$

( $\vec{E}'$, $\vec{B}'$ 는 전하와 같이 움직이는 frame 에서의 전자기장이다.)

나) 이 문제는 일반적으로 다음과 같은 moving charge 에 의한 Lienard-Wiechert Fields 를 이용하여 풀수 있다.

$$\vec{E}(\vec{x},t) = q\left[\frac{\hat{n}-\vec{\beta}}{\gamma^2(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3R^2}\right]_{ret} + \frac{q}{c}\left[\frac{\hat{n}\times\{(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{n})^3R}\right]_{ret}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = [\hat{n}\times\vec{E}]_{ret}$$

속도 $\vec{V} = \vec{\beta}c$ 로 등속운동을 하는 점전하에 의한 x축 상의 관측점 P(x,y=o) 에서의 전기장 $\vec{E}$ 를 Lienard-Wiechert Field 를 이용하여 구하라.

다) 이 점전하가 가속운동을 하면 radiation field 가 생긴다. $|\beta| \ll 1$ 인 경우, 단위 solid angle 당 radiation power 는

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}|\dot{v}|^2\sin^2\theta$$

로 됨을 보여라. ( $\theta$ 는 그림에 표시된 각도)

라) 이 점전하가 상대론적인 속도를 갖고 있으며 원점에서 아주 짧은 시간 $\Delta\tau$ (particle rest frame time) 동안만 가속운동을 하였다고 하자. 이때 방출되는 radiation energy 는 단위 solid angle 당

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{e|\dot{v}|^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}\Delta\tau$$

가 됨을 보여라. 또, 이때의 Angular distribution 모양을 개략적으로 그려라

# 제 22 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 ( 양자역학 · 통계 역학 )　　　　1991. 1. 25.

양자역학

1. 자기능률 (magnetic moment) 이 각각 $g_1\vec{s}_1$ 및 $g_2\vec{s}_2$ 인 서로다른 두개의 spin 1/2 입자가 lattice site 에 묶여 있다. ( $\vec{s}$ 는 입자의 스핀 연산자이다.) 따라서 두 입자의 운동에너지는 무시하자. 두입자 사이에는 $\alpha\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2$ ($\alpha$ 는 상수)의 스핀-스핀 작용이 있고 여기에 z - 축 방향으로 균일한 자장 $\vec{B}=B\hat{z}$ 를 걸었다고 하자.

가) 이계의 해밀토니안을 써라

나) $\vec{S}=(\vec{s}_1+\vec{s}_2)$ 라 할때 $S^2$ 와 $S_z$ 의 eigenbasis 에서 이들의 양자수가 각각 $S=1$　$S_z=\pm1$　인 고유상태 들의 energy 는?

다) $S_z=0$ 로 주어지는 상태공간내 에서 계의 해밀토니안 H 를 행렬로 나타내라 ( $|S=1,\ S_z=0\rangle$ 과 $|S=0,\ S_z=0\rangle$ 를 basis 로 할것)

라) (다)의 경우 에너지 고유치와 고유함수를 구하라.

2. 에너지가 E인 입자가 -Z 축으로 부터 입사하여, short-range 퍼텐셜 V(r) 에 의해 산란되었다.

가) 처음 입사 상태를 $|\phi\rangle$ 라고 하고 산란된 상태를 $|\psi^{(+)}\rangle$ 라 하면, $|\psi^{(+)}\rangle$ 는 연산자식으로

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + G_0V|\psi^{(+)}\rangle,\quad G_0=\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}$$

$$\left(\text{여기서}\quad H_0=\frac{p^2}{2m}\right)$$

처럼 표현할 수 있음을 보여라.

나) 윗식을 위치공간에서 써보면 산란 입자의 파동함수 $\psi^{(+)}(\vec{r})$ 를

$$\psi^{(+)}(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi^{(+)}\rangle = \langle\vec{r}|\phi\rangle + \int d^3\vec{r}\,'\,G_0(\vec{r},\vec{r}\,')V(\vec{r}\,')\psi^{(+)}(\vec{r}\,')$$

처럼 쓸수 있게 된다. 이때

$$G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

가 됨을 증명하라. 여기서 $k=|\vec{k}|$ 는 입사입자의 wave vector 의 크기이다.

다) 산란된 입자를 관측하는 점 $\vec{r}$ ($\vec{r}$ 은 포텐셜 중심에서 멀리 떨어진 곳으로 생각) 에서의 파동함수는

$$\psi^{(+)}(\vec{r}) \xrightarrow[|\vec{r}|\to\infty]{} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{f(\vec{k},\vec{k}\,')}{r}e^{ikr}$$

처럼 쓸수 있다. 이때 $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ 을 (나) 의 결과를 이용하여 구하라. 여기서 $\vec{k}\,'$ 은 $\vec{k}\,'=k\vec{r}/|\vec{r}|$ 로 정의 되는 양이다.

라) Potential 이 $V(\vec{r})=V_0\dfrac{e^{-\mu r}}{r}$ 일때 1st Born 근사를 써서 $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ 를 구하라.

3. 양자역학을 써서 상대론적 조화진동자를 기술하고자 할 때 spin 이 0 인 입자이면

$$\left\{\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-V(\vec{r})\right]^2-c^2\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2-m^2c^4\right\}\phi=0$$

(여기서 $V(\vec{r})=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)\equiv\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ )

와 같이 Klein-Gordon 방정식을 사용할 수 있다.

가) 위 방정식의 해를 $\phi=e^{-imc^2t/\hbar}\psi$ 로 놓았을때, 비상대론적 극한에서 $\psi$ 는 잘아는 비상대론적 쉬뢰딩거 방정식

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+V(\vec{r})\right]\psi$$

을 만족함을 보여라.

나) 포텐셜 에너지가 정지에너지 ( $=mc^2$ ) 에 비해 상당히 작을때 상대론적 영향을

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=[H_0+H']\psi$$

$$\left(\text{여기서}\quad H_0=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right)$$

처럼 위 비상대론적 쉬뢰딩거 방정식에 적당한 섭동항 H' 를 도입해서 기술할 수 있을 것이다. 이 경우

$$H'=-\frac{\hbar^4}{8m^3c^2}(\vec{\nabla}^2)^2$$

이 됨이 알려져 있다. 주어진 항 $-\frac{\hbar^4}{8m^3c^2}(\vec{\nabla}^2)^2$ 을 특수상대론의 에너지-운동량 관계로 부터 간단히 해석하고, 이항 때문에 생기는 기저상태의 first-order 에너지 변화를 내주는 식을 써라.

다) (나)의 섭동이론에 따라 계산하는데 비 상대론적 oscillator 의 기저상태 파동함수

$$\psi_0(\vec{r})=\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{3/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}$$

을 momentum space 파동함수 $\tilde{\psi}_0(\vec{p})$ 로 바꾸어 생각하는 것이 편리하다. $\tilde{\psi}_0(\vec{p})$ 를 구하라.

라) 위의 방법에 따라 (상대론적 보정항을 보함한)

# 제 22 회 물리학과 대학원 자격시험

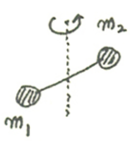
과목명 ( 양자역학 · 통계역학 )    1991. 1. 25.

oscillator 의 기저상태 에너지를 계산하라. (momentum space 파동함수를 쓰지 않아도 무방하며

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1} a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ 임.)

## 통계 역학

4. 질량 $m_1, m_2$ 인 두 원자로 구성된 diatomic molecule 을 생각하자. Vibration 운동을 무시할때 이 분자의 Hamiltonian 은




$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

으로 쓸 수 있다. 여기서 첫째항은 질량 중심의 병진 운동을 나타내고 ( $M = m_1 + m_2$ ), 둘째 항은 질량중심에 대한 회전운동을 나타낸다. (I: moment of inertia, $\vec{L}$ : 각 운동량 vector)

가) N 개의 분자로 이루어진 계 (system) 의 정준분배 함수 (canonical partition function) Z 는

$$Z = \frac{1}{N!}\zeta_{trans}^N \zeta_{rot}^N$$

로 쓸수 있고,

$$\zeta_{trans} = V\left(\frac{2\pi M k_B T}{h^2}\right)^{3/2}, \quad (V: \text{부피})$$

$$\zeta_{rot} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left(-\frac{\beta\hbar^2}{2I}l(l+1)\right), \quad \left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right)$$

로 주어짐을 보여라. (단, 분자의 밀도는 충분히 작아서, 병진운동은 classical limit 로 기술할 수 있다고 하자)

나) T 가 매우 높을때 $\zeta_{rot} \simeq \frac{2Ik_BT}{\hbar^2}$ 로 쓸 수 있음을 보여라. 또한 이때 회전운동에 의한 정적비열의 크기는 얼마인가?

다) 계를 큰 정준분포 (grand canonical distribution) 을 이용하여 기술하려 한다. 화학 포텐셜(chemical potential)을 $\mu$ 라고 할때, 계의 큰분배함수 (grand partition function) $\Omega$ 는 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$\Omega = e^{z\zeta}$$

여기서 $z = e^{\mu/k_BT}$, $\zeta = \zeta_{trans}\zeta_{rot}$ 이다.

이때 화학포텐셜 $\mu$ 는 얼마로 조정해야 하는가? N, V, T 등으로 나타내어라.

5. 헤로글로빈 한 분자에는 산소분자가 부착할 수 있는 위치가 4군데 있다. 각 부착점에는 산소분자 1개만이 부착가능하고, 부착된 산소분자들 사이의 상호작용은 무시할 수 있다. 산소분자가 부착되었을 때의 결합 에너지 (binding energy) 를 $\varepsilon$, 화학 포텐셜 (chemical potential) 을 $\mu$ 라고 할때, 다음 물음에 답하라. (단, ln2 = 0.69, ln3 = 1.10, ln5 = 1.61 로 한다.)

가) 절대온도 T 에서 헤로글로빈의 한 부착점에 산소분자가 부착되어 있을 확률 P 를 구하고, 또한 헤모글로빈 한 분자에 흡착되어 있는 평균 산소분자의 갯수 n 을 구하라.

나) 체온 (37°C) 의 혈액내 산소의 절대활동도 $z = e^{\beta\mu} = 10^{-5}$ $\left(\beta = \frac{1}{k_BT}\right)$ 일때, 헤모글로빈의 각 부착점에 산소가 부착될 확률은 90% 라고 한다. 산소분자의 결합에너지 $\varepsilon$ 를 $k_BT$ 의 단위로 구하라.

다) 일산화탄소 (CO) 는 산소가 부착해야 할 자리에 산소분자보다 더 잘 부착하므로 중독 현상을 일으킨다. 위 (나)와 같은 조건에서 일산화탄소의 절대 활동도가 $z' = 10^{-7}$ 이면 10% 의 부착점에만 산소가 부착된다고 한다. 일산화탄소의 결합 에너지 $\varepsilon'$ 을 구하라.
(단, 각 부착점에는 산소분자 혹은 일산화탄소 분자 하나만이 부착할수 있다.)

/...