

양자역학

1. 스핀 각 운동량 $S = \frac{1}{2}$ 인 어떤 하전 입자가 제도 각 운동량 $L = 1$ 인 상태에 있다.

1). 이 입자의 전 각 운동량 J 는 어떠한 값을 가질수 있는가?

2). 이 입자의 자기 양자수를 m_L 과 m_S 라 할때 $L_{\pm}|l, m\rangle = \sqrt{(l \pm m)(l \mp m + 1)} |l, m \pm 1\rangle$ 을 이용하여 $J = \frac{1}{2}$ 인 상태를 $|l, m_L\rangle |S, m_S\rangle$ 로 전개하면

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

로 표시됨을 보이라.

3) 구조화함수 Y_{lm} 이 극좌표 (θ, φ) 에 대해

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

로 주어짐을 이용하여 $J = \frac{1}{2}$ 인 경우 이 입자의 전하 분포가 J_z 의 값에 무관하게 구대칭임을 보이라.

4) Spinor 의 (θ, φ) 방향 회전은

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \text{ 인}$$

행렬로 기술된다. 이 입자가 $J = \frac{1}{2}$, $J_z = \frac{1}{2}$ 인 상태에 있을때 스핀이 (θ, φ) 방향을 향하고 있을 확률을 구하라.

2. 하밀토니안 H 가

$H = H_0 + V_t$ 로 주어지는 계가
있다. H_0 는 시간에 무관하고
 $t < 0$ 에서 $V_t = 0$ 이라 하자.
 V_t 를 섭동으로 취급하고 이 계의
파동함수 $|\Psi(t)\rangle$ 를
 $|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\phi(t)\rangle$
라 하자.

1) $V(t)$ 를

$$V(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V_t e^{-iH_0 t/\hbar}$$

라 둘때 $|\phi(t)\rangle$ 가 만족하는
슈뢰딩거 방정식을 $V(t)$ 로 표시
하라. 이때

$$|\phi(t)\rangle = T \left[\exp \left(-i\hbar \int_0^t V(t') dt' \right) \right] |\phi(0)\rangle$$

로 표시할 수 있음을 보이고 이 식의
의미를 설명하라.

2) $t < 0$ 에서 이 계가 H_0 의
어떤 고유상태 $|0\rangle$ (에너지 E_0)
에 있었다고 하자. 임의의

t 에서 이 계가 $E = E_m$ 인
상태 $|m\rangle$ 에 있을 확률

$P_m(t)$ 를 V_t 의 1차항까지 구하라.

3) V_t 가

$$V_t = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ V (= \text{상수}) & ; t > 0 \end{cases}$$

인 경우 $P_m(t)$ 를 $E_m - E_0$ 의

함수로 나타내고 이 결과와 불확정성 원리와의 관계를 설명하라.

- 4) 상태 $|m\rangle$ 군방에 연속적인 에너지 상태들이 모여 있다고 하자. 이 상태들의 집합을 N 이라 할때 상태 $|0\rangle$ 에서 이 상태 집합으로의 천이율을 $P_N(t) = \sum_{m \in N} P_m(t)$ 가 t 에 비례함을 보이라. (t 가 충분히 크다고 가정하고 $m \in N$ 일 경우 $\langle m|V|0\rangle$ 와 에너지 준위 밀도 $\rho(E_m)$ 이 E_m 에 대해 부드럽게 변한다고 가정하라.)
-

3. 헬륨 (${}^4_2\text{He}$) 원자에 대해 다음 물음에 답하라.

- 1) 슈뢰딩거 방정식을 쓰고 각 항의 의미를 간단히 설명하라.
- 2) 핵의 질량이 전자의 질량보다 ^{하고} 매우 크다고 전자와 전자의 상호작용을 무시 할때 바닥상태의 전자의 파동함수를 (스핀 파동함수까지 포함하여) 구하라.
- 3) 같은 가정하에 첫 들뜬 상태의 파동함수를 구하라.
- 4) 같은 가정하에 수소원과 바닥상태의 에너지 준위가 -13.6 eV 임을 이용하여 바닥상태와 첫 들뜬상태

의 에너지 고유값을 구하라.

- 5) 전자와 전자의 상호작용을 고려할 때 바닥 상태가 어떻게 달라 지는지 간단히 논하라.

통계역학

4. 부피 $V (= L^3)$ 인 상자속에 있는 N 개의 스핀 1 보손 (boson) 들로 이루어진 이상기체를 생각하자. 각 입자의 질량은 m 이며 이 계는 온도 T 인 열평형 상태에 있고 화학 퍼텐셜은 μ 이다.

1) 계의 큰 분배함수 (grand partition function) 를 구하고 운동량 $\vec{p}$ 인 입자의 평균 차지수 (occupation number) $\bar{n}_p$ 를 계산하라.

2) 1)에서 구한 $\bar{n}_p$ 를 고전적인 맥스웰-볼츠만 (Maxwell-Boltzmann) 분포로 근사시킬 수 있는 조건을 구하고 그 물리적 의미를 설명하라.

3) 이제 $-z$ 방향으로 균일한 중력장이 존재하는 경우를 생각하자. 2)의 조건이 성립한다고 하고 계의 분배함수와 평균 에너지를 계산하라.

4) 위에서 2)의 조건이 성립하지 않는 경우에는 계의 분배함수 또는 큰 분배함수를 어떻게 계산할 수 있는지 간단히 설명하라.

$$\left(\text{단 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ 이다} \right)$$

5. 스핀이 $\frac{1}{2}$ 인 $N (\approx 10^{23})$ 개의 자기 원자 (magnetic atom) 로 된 계를 생각하자. 이 계는 온도 T 가 0 K 가까운 저온에서 강자성을 띈다. 즉 모든 스핀이 한 방향으로 정렬한다. 또 온도가 아주 높은 상태에서는 각 스핀의 방향이 멋대로 향하고 있다. 스핀의 방향 이외의 모든 자유도는 무시하고 다음 물결에 답하라.

1) 이 계의 엔트로피를 통계역학적 입장에서 정의 하고

2) 이 엔트로피를 n_1, n_2 의 함수로 구하라. (여기서 n_1 은 up spin 의 갯수, n_2 는 down spin 의 갯수이다.)

3) 이 계의 엔트로피를 열역학적 입장에서 정의 하여 이 계의 비열 $C(T)$ 와 온도 T 로 나타내어라.

4) 이 계의 비열 $C(T)$ 는 강자성을 일으키는 원자 상호 작용이나 $C(T)$ 의 함수 꼴에 관계없이 항상 다음식을 만족 시킬 것 을 보이라.

$$\int_0^{\infty} \frac{C(T)}{T} dT = Nk \ln 2.$$

역학

1. Lagrangian L 에 인 외의 상수 α 를 곱하여도 운동방정식은 변함이 없음을 자명한 사실이다.
 위치에너지 $V(r_1, \dots, r_n)$ 가 위치 r_i 에 대하여 degree 가 k 인 homogeneous function 이어서

$$V(\alpha r_1, \alpha r_2, \dots, \alpha r_n) = \alpha^k V(r_1, \dots, r_n)$$
 이라 하자.
- 1) 만약 이 계의 질량들은 변함이 없고 r_i 들이 $r_i' = \alpha r_i$ 로, 시간 t 가 $t' = \beta t$ (β : 상수)로 축척(scaling) 되었을 때, 축척 전후에 같은 운동방정식을 만족시킬 수 있도록 α 와 β 사이의 관계를 구하라.
- 2) 속력, 총 역학에너지, 각운동량의 크기의 축척 전후의 관계

$$\frac{v'}{v}, \frac{E'}{E} \text{ 및 } \frac{|L'|}{|L|}$$
 를 α 와 k 로 구하라.
- 3) 문제 1)의 결과를 이용하여 아래 사실들을 증명하라.
 - (i) 스프링으로 만든 진자의 주기는 폭크의 법칙이 만족되는 범위 내에서 진폭에 무관하다.
 - (ii) 균일한 중력 가속도 g 의 영향 아래에서의 한 입자가 낙하운동을 할 때 낙하시간 t 는 낙하한 높이 h 에 대해 $t \propto \sqrt{h}$ 의

관계를 갖는다.

(iii) 케플러의 제 3 법칙에 의하면
주기 T 와 장축 (major axis)
의 크기 l 과의 관계는
 $T^2 = l^3$ 이다.

f) Virial Theorem 즉 위치 에너지
 V 가 r_i 에 대해 degree k 인
homogeneous function 이면,
운동 에너지의 한 주기 평균
 $\langle T \rangle$ 와 위치 에너지의 한 주기 평균
 $\langle V \rangle$ 사이에는 $2\langle T \rangle = k\langle V \rangle$
관계가 있음을 유도하라.

(힌트) Euler 정리 : 어떤 함수 f 가
 r_i 의 k degree of
homogeneous function 이면

$$\sum_i r_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = k f \quad \text{이다.}$$

2. 에너지가 E 인 입자들이 구대칭포텐셜
 $V(r) = \frac{K}{r^2}$ (K 는 주어진 상수)

에 의해 산란되는 경우를 고전역학적
관점에서 생각하자.

(아래 1) 및 2) 문항에서 K 는
양수로 간주할 것).

1) 산란각 θ 를 충돌계수 (impact
parameter) b 의 함수로 나타내라.

2) 미분 산란 단면적은

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{K\pi^2}{E\sin\theta} \frac{\pi - \theta}{\theta^2(2\pi - \theta)^2}$$

처럼 주어 점을 보이라.

3) 만약 K 가 음수라면 어떻게
되겠는가? 이때 입자가 force center
에 붙잡히게 되는 경우에 해당하는
산란 단면적을 구하라.

전자기

3. 전기 전도도 및 유전상수가 각각 (g_1, ϵ_1) , (g_2, ϵ_2) 인 두 매질의 경계면에 주파수 $\frac{\omega}{2\pi}$ 인 전자파가 가해졌다.

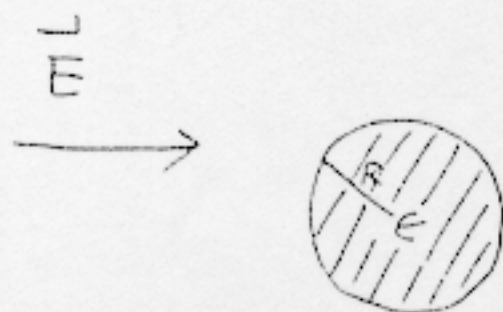
(힌트: $\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$)

1) $g_1 = g_2 = 0$ 일때 이 경계면상의 surface charge density $\cdot \sigma$ 가 0임을 밝히고, 전기장의 수직 성분 간에는 $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$ 의 관계가 성립함을 밝혀라.

2) g_1, g_2 가 0이 아닌 유한값일때 E_{1n} 과 E_{2n} 의 관계를 유도하라.

3) $g_2 = \infty$, $g_1 = \text{유한}$, 일때 E_{2n} 과 E_{1n} 을 각각 구하라.

4. 균일한 정전기장 $\vec{E}$ 가 있는 자유공간에 반지름이 R , 유전율 ϵ 인 등방성의 균일한 유전체 구를 놓았을때



1) 구의 중심으로 부터 위치 $\vec{r}$ 인 곳에서의 포텐셜을 구하라.

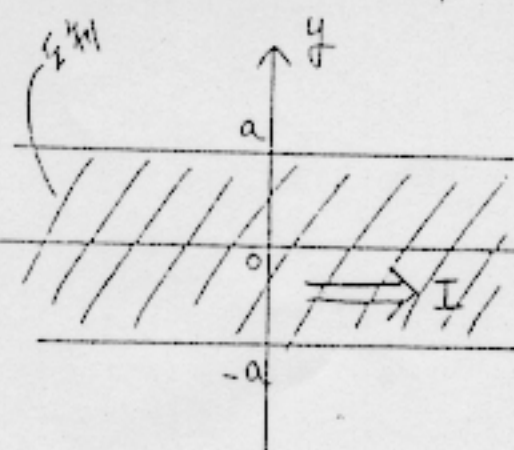
2) 유전체 구의 전기 쌍극자 능력을 구하라

3) 이제 극판 간격이 d , 전위차 V 인 평행판 축전기 내에 유전체 구 ($R \ll d$)를 넣었을때 축전기에

저장된 전기장 에너지의 변화량을 구하라. 축전기 전극간의 전위차는 변하지 않는다고 한다.

4) 또, 유전체 구가 기여하는 축전기의 전기 용량의 변화는?

3. 그림과 같이 무한대로 넓고



두께가 $2a$ 인

도체 판이 양쪽에 수직이 되게 놓여 있다.

도체판의 전기전도도는 σ , 투자율은 μ 이다.

도체 속에는 x 축 방향으로

$\vec{I} = I_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$ 의 전류가 흐르고

있으며 $\vec{I}$ 는 x -방향으로의 단위길이당 전류를 나타내며 x 및 y 좌표에는 관계없는 함수이다. 즉 $I_0 = I_0(y)$ 이다. $\hat{e}_x$ 는 x -방향의 단위 벡터이다.

1) 변위전류 (Displacement Current)를 무시하였을 때 전류밀도 (Current density)는 다음의 방정식을 만족함을 보이라

$$\nabla^2 \vec{J} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

2) 1)의 방정식을 풀어 도체내의

$$\vec{J} = \frac{I_0(1-i)}{2l} \left[\frac{e^{(1-i)y/l} - e^{-(1-i)y/l}}{e^{(1-i)a/l} - e^{-(1-i)a/l}} \right] e^{-i\omega t} \hat{e}_x$$

임을 보이라. 단 $l = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$ 이다.

3) $l \rightarrow \infty$ 인 경우 $\vec{J}$ 의 근사식을 구하고 그 결과를 간단히 논하라

4) $l \ll a$ 인 경우 $\vec{J}$ 의 근사치를 구하고 그 결과를 도표로 표시하고 간단히 논하라