제 24 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 (역 학 . 전기역학) 1993. 1. 12

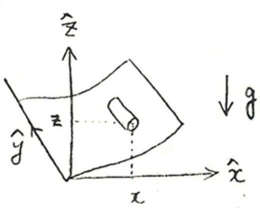
역 학

1. 경사진 면을 따라서 미끄러짐이 없이 구르는 물체의 운동을 생각하자. 구름마찰은 무시하고 물체의 질량을 M, 면과 물체 사이의 (미끄럼) 최대 정지마찰계수는 μ 라고 한다.

가) 면이 경사각 α 인 평면이고 물체를 반지름이 a, 회전관성 능률이 $I = \beta Ma^2$ 인 원통이라고 할 때, 원통이 미끄러짐없이 구를 수 있는 최대 경사각 α_m 을 구하라.

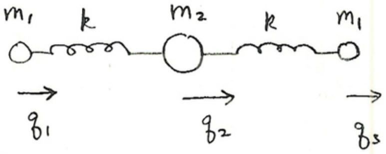
나) (가)의 결과를 이용하여 구를 수 없는 물체가 더 미끄러지기 쉬움을 설명해 보아라.

다) 경사진 면이 곡면인 경우에도 곡면의 기울기가 평면에서 구한 최대 기울기보다 작으면 미끄러짐이 없는 운동을 계속 한다. 그림에서 구르는 원통의 질량중심의 높이가 $z = f(x)$ 로 주어질 때, 원통의 운동방정식을 좌표 x 를 일반화좌표로 하여 유도하라. 단, 원통의 반지름 a 가 작아서 질량중심의 (x,z) 좌표와 접선의 (x,z) 좌표의 차이는 무시할 수 있다고 가정한다.



라) (다)의 원통이 곡면의 굴곡부근에서 미소진동을 하는 경우 진동수를 구하라.

2. CO_2 분자는 그림과 같이 세개의 원자가 일직선상에 놓인 것으로 간주할 수 있다. 산소와 탄소원자의 질량을 각각 m_1 과 m_2, 이들 원자가 각각의 평형위치로부터 분자축 (x축) 방향으로 진동하는 변위를 q_1, q_2, q_3, 원자사이의 스프링상수를 k 라고 할 때 다음 물음에 답하라.



가) 세 원자에 대한 운동방정식을 각각 적어라.

나) CO_2 분자의 운동에너지와 위치에너지를 구하라.

다) CO_2 분자의 진동에 대한 고유진동수와 normal mode 를 구하고 이 모드들을 그림으로 나타내어라.

라) 두개의 산소원자중 하나를 ^{17}O 동위원소로 바꿔주면 고유진동수와 normal mode 들이 어떻게 변화되는지 근사적으로 설명하라. 스프링상수는 변하지 않는다고 가정한다.

전기역학

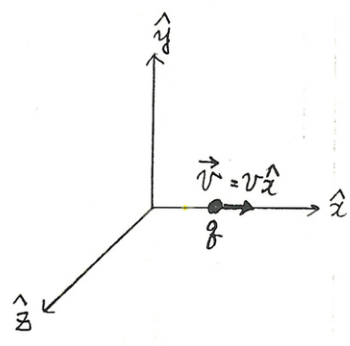
3. 균일한 전기장과 자기장이 $\vec{E} = E_0 \hat{z}$, $\vec{B} = B_0 \hat{x}$ (E_0, B_0 는 상수임)와 같이 주어진 영역내에 반경이 a , 총전하가 0 인 구형의 완전도체를 놓은 경우를 생각하자. 구형도체의 중심을 좌표의 원점으로 취하고 $r > a$ (즉, 도체바깥) 에서의 전기장 및 자기장에 대하여 알아보기로 한다.

가) $r = a_+$ (즉, 도체표면)에서 전기장및 자기장이 만족하여야 하는 경계조건들을 써라.

나) 도체바깥의 임의의 점 $\vec{r}$ 에서의 전기장 $\vec{E}(\vec{r})$ 를 구하라. 또, 도체에 유도된 총 전기쌍극자 모우먼트 $\vec{p}$ 는 어떻게 주어지는가 ?

다) 도체바깥의 임의의 점 $\vec{r}$ 에서의 자기장 $\vec{B}(\vec{r})$ 를 구하라. 또, 도체에 유도된 총 자기쌍극자 모우먼트 $\vec{m}$ 은 어떻게 주어지는가 ?

4. 그림과 같이 전하량 q 를 가지는 한 입자가 좌표계 S 에서 일정한 속력 v 로 x 축을 따라서 움직이고 있고 t = 0 일 때 S 의 원점을 통과하였다. 속력 v 는 광속 c 에 가까운 크기라고 하고 다음 물음에 답하라. [Hint : scalar potential ϕ 와 vector potential $\vec{A}$ 는 $A_\mu = (\vec{A}, i\phi/c)$ 로 4-vector 를 이룬다.]



제 24 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 (역 학 . 전기역학) 1993. 1. 12

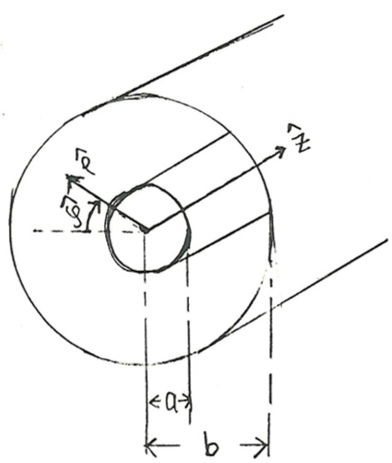
가) 좌표계 S 에서 임의의 시간 t 와 위치 $\vec{r}$ 에서의 scalar potential $\phi(\vec{r},t)$ 와 vector potential $\vec{A}(\vec{r},t)$ 를 구하라.

나) 좌표계 S 에서 임의의 시간 t 와 위치 $\vec{r}$ 에서의 전기장 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 와 자기장 $\vec{B}(\vec{r},t)$ 를 구하라.

다) 위의 결과들로 부터 좌표계 S 에서 전기장 $\vec{E}$ 에 대한 Gauss 법칙이 성립함을 보여라.

5. 그림과 같이 반경이 a, b 인 두개의 완전도체로 된 무한히 긴 cylindrical coaxial cable 로 도파로(waveguide)를 만들었다. 두 도체사이는 진공이고 이 도파로로 TEM 파가 진행할 때, $a \le \rho \le b$ 에서의 자기장 $\vec{B}$ 는

$$\vec{B} = B_o \frac{\cos(kz - \omega t)}{\rho}\hat{\varphi}$$ 로 주어진다. (B_o: 상수)



가) 이 도파로를 진행하는 TEM 파의 진행속도(propagating velocity)를 구하고, 이 파의 cutoff 주파수의 존재여부에 대하여 논의하라.

나) $a \le \rho \le b$ 사이에서 전기장 $\vec{E}$ 를 구하고, 이로부터 두 도체 사이의 전위차(potential difference) V 를 구하라.

다) 안쪽 도체에 흐르는 전류 I 의 크기와 방향을 구하라.

라) 이 coaxial cable 의 임피던스(impedance) Z 를 구하라. 또, b = 2a 인 경우 Z 는 몇 ohm (Ω) 이 되느냐 ?

참 고 사 항

Maxwell's equation

(CGS)	(MKS)
$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{J} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$1\ \text{ohm}\ (\Omega) = (1/9)\times 10^{-11}\ \text{s cm}^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 377\ \Omega$$

cylindrical coordinate system

$$\vec{\nabla}\Psi = \hat{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} + \hat{k}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

spherical coordinate system

$$\vec{\nabla}\Psi = \hat{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r(\sin\theta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2(\sin\theta)}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\theta) + r\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r(\sin\theta)\hat{\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r(\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

제 24 회 물리학과 대학원 자격시험

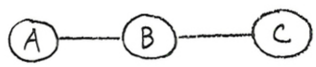
과목명 (양자역학. 통계역학) 1993. 1. 12

양자역학

1. 그림에서처럼 등간격으로 구성된 선형의 3원자 분자에서 한 전자의 상태를 고려한다. $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$, $|\phi_C\rangle$ 를 전자가 각 원자에 localize 되는 세 orthonormal state 라고 하자. 전자가 한 원자에 속하고 다른 원자로 이동할 가능성이 없을 때, 위의 세 상태는 같은 에너지 E_0 를 가진다. 이제 세 상태 사이의 coupling(H')이 다음과 같이 주어진다고 할 때 물음에 답하라.

$$H'\,|\phi_A\rangle = -\,a\,|\phi_B\rangle$$
$$H'\,|\phi_B\rangle = -\,a\,|\phi_A\rangle - a\,|\phi_C\rangle$$
$$H'\,|\phi_C\rangle = -\,a\,|\phi_B\rangle$$

여기서 a 는 양수이다.



가) 이 전자의 쉬뢰딩거방정식을 써 보아라.

나) 이 전자의 고유에너지와 고유상태를 구하라.

다) 시간 t = 0 에서 전자가 $|\phi_A\rangle$ 상태로부터 운동을 시작할 때, t > 0 에서 바닥상태(ground state)에 있는 전자를 발견할 확률은 얼마인가 ? 또, 전자를 B 원자에서 발견할 확률을 t 의 함수로 구하라.

라) 어떤 observable D 는 $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$, $|\phi_C\rangle$ 에 대해 각각 -d, 0, d 의 고유치를 갖는다고 한다. 초기조건이 (다)에서의 초기 조건과 같을 때, 시간 t 에서 D 를 측정할 경우 기대값은 얼마인가 ?

2. 수소원자의 포텐셜 에너지를 $V(r) = -e^2/r$ 이라고 할 때, 바닥상태(ground state) 및 첫번째 들뜬상태의 에너지와 파동함수는 다음과 같다.

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} \quad (n=1,2)$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \quad \text{Bohr radius}$$

$$\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2\, e^{-r/a_0}$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}\,a_0}\, e^{-r/2a_0}$$

가) 수소원자의 상태 $\psi_{n\ell m}$은 반전연산자(parity operator) P 의 고유함수임을 설명하고 그 고유치를 구하라. [Hint : 반전연산자 P 와 각운동량 $\vec{L}$ ($L_\pm$, L_z)은 서로 교환(commute)됨을 이용하여도 좋다. 또,

$$Y_\ell^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi\,(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

이다.]

나) 하밀토니안이 반전연산자와 교환할 때 nondegenerate state $|\phi\rangle$ 는 P 의 고유상태인가 아닌가를 보여라.

다) 균일한 전기장 $\vec{E} = E\hat{z}$ 내에 수소원자를 놓을 때, 바닥상태 및 첫번째 들뜬상태의 에너지 준위는 어떻게 변하는가?

3. 스핀이 1/2 인 중성자(neutron)는 스핀에 의한 자기모우먼트 $\vec{\mu} = [g_n e/(m_n c)]\,\vec{S}$ (여기서 m_n = 중성자의 질량, $g_n = -1.91$, e = 양성자의 전하, $\vec{S}$ = 중성자의 스핀벡터)를 가지고 있다. 시간 t = 0 에서 x-방향의 스핀이 $\hbar/2$ 로 측정된 중성자가 균일한 자기장 $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 인 영역으로 들어간다고 하자.

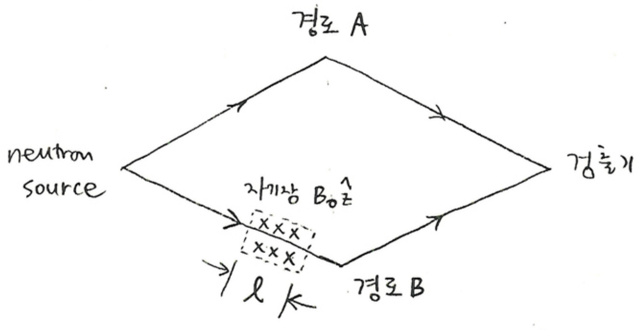
가) 시간 t (t > 0)에서 중성자의 스핀파동함수를 구하라.

나) (가)에서 중성자의 스핀이 z-축을 중심으로 precess 함을 보이고 precession 의 주기를 구하라.

다) 중성자 간섭실험은 아래 그림과 같이 일정한 운동에너지를 가진 중성자 beam 을 같은 길이의 두 경로(path) A, B 로 보내고, 경로 B 에는 균일한 자기장 $B_0\hat{z}$ 의 영역이 있을 때 검출기에 간섭현상이 나타나는 것을 측정하는 것이다. Source 에서의 중성자 beam 의 스핀이 $\langle S_x\rangle = \hbar/2$ 이고 중성자의 운동에너지는 E (nonrelativistic), 자기장영역의 길이가 ℓ 이라고 하면 검출기에서 관측되는 중성자 beam 의 세기(intensity)는 어떻게 주어지는가 ?

제 24 회 물리학과 대학원 자격시험

과목명 (양자역학. 통계역학) 1993. 1. 12



라) 실제 실험에서는 B_0 의 크기를 변화시키면서 간섭현상을 측정할 수 있다. 간섭현상에서 인접한 두 최대세기에 해당하는 자기장의 차이를 구하라.

통계역학

4. <u>이상적인 Fermi 가스</u>에서 분배함수(partition function)를 (고전역학적 한계를 넘어) 정확히 구하고자 한다. 계산의 편의상 입자의 총 갯수를 N = 2 로 하고 이 두개의 입자가 3차원의 부피 V 안에 존재하며 온도 T 인 주위의 thermal reservoir 와 열평형을 이루고 있다. V 는 충분히 커서 그 속에 존재하는 입자의 운동량은 연속적인 값을 가질 수 있는 것으로 한다. 또한 Fermi 가스이므로 입자가 스핀을 갖고 있으나 계산을 간단히 하기 위하여 스핀은 무시하고 (즉, 스핀파동함수는 대칭이라 하고), 다만 입자들이 Fermi 통계를 만족하는 것으로 한다. 다음 물음에 답하라.

가) 두입자의 wave vector 가 $\vec{k}_1$ 과 $\vec{k}_2$ 일 때. 이 <u>입자계</u>의 규격화된 파동함수(normalized <u>two-particle</u> wave function)를 적어라. 단, 각 입자의 위치좌표를 $\vec{r}_1$ 과 $\vec{r}_2$ 라고 한다.

나) 이 계의 분배함수를 계산하여라.

다) (나)의 결과에서 고전적 분배함수와 차이가 나는 항을 지적하고 또, 차이가 나는 이유를 한 줄 정도로 간단히 적어라.

라) (나)의 계산과정을 가능한 한 그대로 이용하여 <u>이상적 Bose 가스계</u> (스핀 0, 입자의 총 갯수 N = 2)의 분배함수를 구하라.

5. 온도 T 인 유체 속에서 질량 m 의 물체가 용수철상수 $m\omega_0^2$ 인 용수철에 매달려서 1차원 진동을 하고있다. 물체에는 빠르기(속력)에 비례하는 저항력(drag force)이 작용하며 그 감쇠상수(damping constant)는 $m\gamma$ 라고 한다. 또, 이 물체에는 열적요동에 의한 멋대로힘(random force) $A(t)$ 도 작용한다. 다음 물음에 답하라.

가) 이 물체의 운동방정식을 적어라.

나) 이 운동방정식으로 부터 물체의 위치 $x(t)$ 에 대한 해가

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(c_1 e^{-i\omega_1 t} + c_2 e^{+i\omega_1 t}\right) + \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,e^{i\omega t'}A(t')$$

로 씌여짐을 보여라. (c_1, c_2 는 상수, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$)

다) 시간이 충분히 지났을 때 물체의 평균제곱위치 $\langle x^2 \rangle$ 을 $A(t)$ 의 일률 스펙트럼(power spectrum)

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \exp(i\omega t) \langle A(0)\, A(t) \rangle_0$$

로 나타내어라. $\langle A(0)\, A(t) \rangle_0$ 는 평형요동(equilibrium fluctuation)을 의미한다.

라) 요동-흩어짐 정리(fluctuation-dissipation theorem)에 의하면

$$m\gamma = S(\omega)/(2k_BT) \qquad (k_B \text{ 는 Boltzmann 상수})$$

가 성립한다. 이를 이용하여 (다)에서 등분배정리(equipartition theorem)가 만족됨을 보여라.