

|       |  |     |  |     |  |        |   |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|
| 소속대학원 |  | 학 번 |  | 성 명 |  | 감독교수학인 | 인 |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|

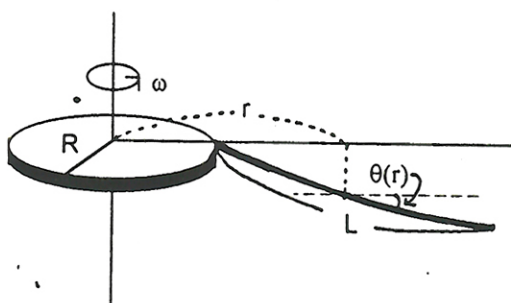
## 물리학과 대학원 자격시험

과 목 명 (고전역학, 전기역학)

1994. 1. 18.

### 고전역학

1. 그림과 같이 반경  $R$  인 원판의 가장자리에 길이  $L$ , 선밀도  $\rho$  인 로프가 매달려있다. 원판은 수평한 위치에서 각속도  $\omega$  로 회전하고 있고 이에따라 로프도 같이 회전한다. 회전속도가 매우 빨라서 로프가 수평선과 이루는 각  $\theta(r)$  은 충분히 작다. (중력가속도는  $g$  라 놓을 것.)



- (가) 로프의 임의의 점에서의 장력  $T(r)$  은 어떻게 주어지는가?  
 (나) 로프의 임의의 점에서의 수평면과 이루는 각  $\theta(r)$  을 구하라.  
 (다) 회전 도중, 어느 순간에 로프의 끝이 어떤 물체에 닿아 작은 펄스의 펄스가 생성되었다. 이 펄스가 원판에 도달되는 시간을 구하라.

2. 3차원 입자의 고전적 하밀토니안은

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \text{ 처럼 쓸 수 있다.}$$

- (가) 대응하는 하밀톤 방정식을 쓰고 이로부터 어떤량  $A(\vec{p}, \vec{r})$  이  $\{H, A\}_{PB} = 0$  을 만족하면  $A(\vec{p}, \vec{r})$  은 constant of motion 임을 보여라.

(여기서  $\{ \ }_{PB}$  는 Poisson Bracket를 나타냄)

- (나) 일반적인 central potential

$V = V(r), (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  의 경우 벡터  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  은 항상 constant of motion 이 됨을 보이고, 특히

$$V = -\frac{\alpha}{r}, (\alpha \text{ 는 상수}) \text{ 라면 벡터 } \vec{\epsilon} = -\frac{\vec{L} \times \vec{p}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r}$$

또한 constant of motion 임을 보여라.

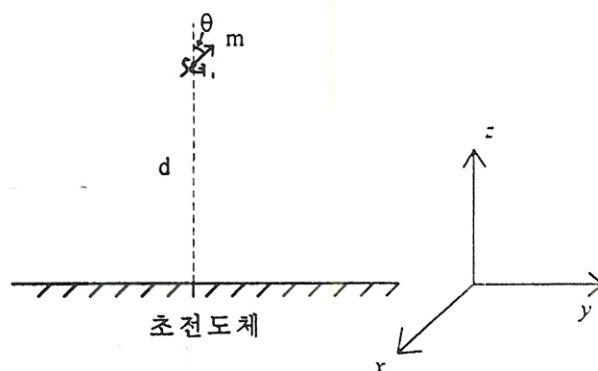
- (다)  $V = -\frac{\alpha}{r}$  의 경우에 (나)에 구한 constant of motion 을

이용해서 입자의 궤적(orbit) 방정식을 구하고  $\epsilon = |\vec{\epsilon}|$  의 값에 따라 나타나는 궤적의 형태에 대해 논하라.

### 전기역학

3. 초전도체 내부에서는  $\vec{B}$  -field 가 0 이 된다. 아래 그림과 같이  $z < 0$  인 영역을 초전도체가 차지하고 있다고 하고, 초전도체에서  $d$  만큼 떨어진 지점  $(0, 0, d)$  에 magnetic moment  $\vec{m}$  인 작은 current loop 이 놓여 있을 경우를 생각하자.  $\vec{m}$  은  $z$ -축과  $\theta$  의 각을 이루며 또 loop의 크기는 무시해도 좋다.

( $\vec{m} = (0, m \sin \theta, m \cos \theta)$  로 잡을 것)



- (가) 초전도체 표면에서  $\vec{B}$  -field 가 만족해야 하는 경계조건은 무엇인가?  
 (나) Image method를 적절히 이용하여  $z > 0$  인 영역에서의  $\vec{B}$  -field 를 구하라.  
 (다) magnetic moment  $\vec{m}$  의 potential energy  $U$  를  $d$  와  $\theta$  의 함수로 구하라.  
 (라) 위의 결과로부터 magnetic moment  $\vec{m}$  이 받는 힘의 크기와 방향을 구하라.  
 (마) (magnetic moment  $\vec{m}$  을 거리  $d$  에 고정시켜 놓았을 때) stable equilibrium에 해당되는 각  $\theta$  는?

☺ 힌트 : free space 에서 원점에 위치한 magnetic moment

$\vec{m}$  에 의한  $\vec{B}$  -field 는  $\vec{B} = \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$  로 주어진다.

|       |  |     |  |     |  |        |   |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|
| 소속대학원 |  | 학 번 |  | 성 명 |  | 감독교수학인 | 인 |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|

## 물리학과 대학원 자격시험

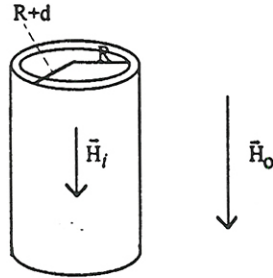
과 목 명 ( 고전역학 전기역학 )

1994. 1. 18.

4. 교류 자기장의 차폐(screening)는 사용되는 금속의 skin

depth,  $\delta = \left( \frac{2}{\omega \sigma \mu} \right)^{1/2}$ , 에

의해 결정된다고 알려져 있다. 자기장의 차폐를 알아보기 위해 그림과 같이 내부 반지름이 R, 외부 반지름이 R+d 인 매우 긴 원통형 금속통을 생각하자. 이 금속통은 비자성체이고 전기 전도도는  $\sigma$  이며



$d/R \ll 1$  이다. 이 금속통에 그림과 같이 금속통에 평행한 방향으로 외부 교류자기장  $\vec{H}_0(t) = \vec{H}_0 e^{i\omega t}$  를 가했을 때 내부의 자기장은  $\vec{H}_i(t) = \vec{H}_0(t) + \vec{H}_s(t)$  로 나타낼 수 있으며 여기서  $\vec{H}_s(t)$  는 유도전류에 의한 차폐자기장을 나타낸다.

(가) Faraday 법칙으로부터 금속통 원둘레에 걸리는 유도 기전력을 구하라.

(나) 이러한 기전력 때문에 금속통의 둘레로 흐르는 단위길이당 유도전류는 얼마인가?

(다) 위의 유도전류로부터 금속통 내부의 차폐자기장  $\vec{H}_s$  을 구하라.

(라) 자기장 차폐율  $|\vec{H}_i|/|\vec{H}_0|$  를 구하고 이로부터 원통형 도체의 경우에는  $d > \delta^2/R$  일때 차폐가 효과적임을 보여라.

5. 3차원 공간상에 localized 된 전류 및 전하밀도가

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}) e^{-i\omega t} \text{ 와 같이}$$

주어졌다고 할 때, wave zone (즉,  $k = \omega/c$  일 때  $kr \gg 1$ ) 에서의 vector potential은

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \equiv \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{cr} \int d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \text{ 처럼 나타낼 수 있다.}$$

다음물음에 답하라.

(가) Electric dipole moment 를  $\vec{p} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}')$  로 정의할

때,  $\int d^3x' \vec{J}(\vec{x}') = -i\omega \vec{p}$  의 관계가 있음을 보여라.

(나) 위의 식을 이용해서 oscillating electric dipole.

$\vec{p}(t) = \vec{p} e^{-i\omega t}$  가 있을때 wave zone 에서의 전장 및 자장을 구하라.

(다) 이 oscillating electric dipole 에 의해 방사(radiate)된 total power 는  $P = \frac{\omega^4}{6} k^4 |\vec{p}|^2$  가 됨을 보여라.

(라) 위의 결과들을 써서 파장이  $\lambda$  인 평면 전자기파가 polarizability가  $\alpha$ 인 molecule에 입사했을 때 나오는 산란 전자기파의 total cross section을 계산하면 그값은 어떻게 주어지는가?

|       |  |     |  |     |  |        |   |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|
| 소속대학원 |  | 학 번 |  | 성 명 |  | 감독교수확인 | 인 |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|

## 물리학과 대학원 자격시험

과 목 명 (양자역학, 통계역학)

1994. 1. 18.

### 양자역학

1. 고체의 열팽창 문제와 관련된 간단한 1차원 모델로서 두 입자사이의 포텐셜이  $V = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 - \lambda x^3$  로 주어지는 양자역학적 계를 생각해보자. 여기서  $x$  는 두 입자간 평형거리로부터 변위에 해당하는 연산자,  $\mu$  는 reduced mass,  $\lambda$  는 충분히 작은 양의 상수로서 두번째항  $-\lambda x^3$  을 섭동항으로 취급할 수 있다. 다음질문에 답하라.

(가)  $|n\rangle$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) 이 unperturbed Hamiltonian (즉,

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$$

의 고유상태들일 때 주어진

$$|N\rangle = |n\rangle - \lambda \sum_{n' \neq n} \frac{\langle n' | x^3 | n \rangle}{E_n - E_{n'}} |n'\rangle$$

가 됨을 보여라

(나)  $x$  의 기대치  $\langle x \rangle_N \equiv \langle N | x | N \rangle$  을  $\lambda$  의 1st order까지 계산하라. [hint:  $a, a^\dagger$  가 1차원 harmonic oscillator 의 lowering 및 raising operator 라고 할 때,

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} (a + a^\dagger)$$

로 됨에 유의할 것.]

(다) 절대온도  $T$  에서 에너지  $E_n$  인 양자상태에 있을 통계적 확률은  $e^{-E_n/kT}$  에 비례한다. quantum statistical average  $\overline{\langle x \rangle}$  를 온도  $T$  의 함수로  $\lambda$  의 1st order까지 구하라.

2. 스핀 1/2 인 3개의 입자들을 포함하는 어떤 물리계에서 그 dynamic variable 로서의 각입자의 스핀 연산자, 즉

$$\vec{S}^{(p)} = (S_x^{(p)}, S_y^{(p)}, S_z^{(p)})$$

(여기서  $p=1,2,3$  는 각 입자를 지칭)만을 고려해도 좋다고 하자.(그림 참조).

이 계의 양자 역학적 하밀토니안이

$$H = \alpha [\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} + \vec{S}^{(2)} \cdot \vec{S}^{(3)} + \vec{S}^{(3)} \cdot \vec{S}^{(1)}]$$

처럼 주어질 때 다음 물음에 답하라.

(가) 만약 이 계의 에너지를 측정한다면 나올 수 있는 값들은?

(나) 이 계의 상태공간의 basis 를 에너지 고유상태들로 잡고자 한다. 이들은  $S_z^{(1)}, S_z^{(2)}, S_z^{(3)}$  의 simultaneous eigenstate들의 어떤 선형결합으로 표현되는가?

(다)  $t=0$ 에서 입자 "1" 은  $S_z = \frac{\hbar}{2}$  (즉, spin up), 입자 "2" 및 "3" 은

$$S_z = -\frac{\hbar}{2}$$

(즉, spin down)상태에 있다고 하자. 이 경우

시간  $t(>0)$ 에서 입자 "1" 의  $S_z$  의 값을 다시

측정해서 그값이  $\frac{\hbar}{2}$  (즉, spin up)일 확률을 구하라.

3. 운동량  $\hbar\vec{k}$ , 질량  $m$  인 입자가 입사되어 3차원 central potential  $V(r) = V_0 \delta(r-l)$  의 영향을 받아 산란되는 경우를 생각하자. 편의상 S-wave (즉 파동함수는  $r$  만의 함수)만 고려하기로 하고 다음 물음에 답하라.

(가) 산란상태에 해당하는 S-wave stationary wave function

$$(에너지 고유값  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ) 을 전 영역에서 구하라.$$

(나) Incident wave  $\psi_{inc} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  속에 포함된 S-wave 성분의 파동함수는

$$\psi_{inc}^{(l=0)} = \frac{1}{2} \left( -\frac{e^{-ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{kr} \right)$$

가 됨을 보여라

(다) 위 결과들을 바탕으로 주어진 포텐셜에 대해 S-wave

scattering cross section  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  을 구하라.

|       |  |     |  |     |  |        |   |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|
| 소속대학원 |  | 학 번 |  | 성 명 |  | 감독교수확인 | 인 |
|-------|--|-----|--|-----|--|--------|---|

## 물리학과 대학원 자격시험

과 목 명 (양자역학, 통계역학)

1994. 1. 18.

### 통계역학

4. 낮은 온도에서 들뜸이  $\omega = ck$  와 같은 분산관계를 갖는 파동을 양자화해서 상호작용이 없는 준입자계로 기술할 수 있다고 하자. 여기서  $\omega$  는 각진동수,  $k$  는

파동벡터  $\vec{k} = \left( \frac{2\pi x}{L}, \frac{2\pi y}{L}, \frac{2\pi z}{L} \right)$  의 크기이다. 여기서

$n_x, n_y, n_z$  는 정수이고  $L$  은 정입방체 용기를 가정할 때 한변의 길이를 나타낸다.

- (가) 이 준입자들은 Bose통계를 따르는데 그 물리적 근거를 설명하라.

- (나) 절대온도  $T$ 에서 이 준입자가 기여하는 계의 내부에너지를 구하라. 단  $\vec{k}$ -mode의 준입자 하나의 에너지는  $\epsilon = \hbar\omega$  이다. ( $\hbar$ 는 Planck상수이다)  
(저분형태로만 표시해도 좋음)

- (다) 이 준입자가 계의 비열에 기여하는 부분은 절대온도  $T$ 의 3제곱에 비례함을 보여라.

- (라) 이 준입자만으로 된 기체가 만드는 압력  $P$ 를 용기의 부피  $V$ , 내부에너지  $U$ 만으로 나타내어라.

5. Antiferromagnetism을 기술하는 간단한 모델로 격자계를 각각 스핀 1/2 인 두개의 sublattice A, B로 나누어 생각해보자. Sublattice A에는 exchange interaction에 의한 effective magnetic field  $-\lambda M_B$  가 작용하고, sublattice B에는 effective magnetic field  $-\lambda M_A$  가 작용한다고 가정하고 이 계를 평균장이론을 써서 고찰해보기로 한다. 여기서  $M_A, M_B$  는 sublattice A, B의 magnetization을 나타내고, 각 sublattice에는 단위부피당  $n$  개의 격자가 있다. [gyromagnetic ratio  $g=2$  이고 외부자기장은 없는 경우만 생각할 것.]

λ 는 양수

- (가) 온도  $T$ 에서 sublattice A의 magnetization  $M_A(T)$ 는

$$M_A = n\mu_0 \tanh\left(-\lambda \frac{\mu_0 M_B}{k_B T}\right) \text{ 와 같은 관계식을}$$

만족함을 보여라. (여기서  $\mu_0$  는 Bohr magneton,  $k_B$  는 Boltzman 상수임)

- (나)  $M_A$  가 만족하는 자체충족 (self-consistency) 방정식을 유도하고 그 해를 graphical method로 구하는 방법도 설명하라.

- (다) Sublattice magnetization  $M_A, M_B$  는 Neel Temperature

$$T_N = \frac{n\mu_0^2 \lambda}{k_B} \text{ 보다 높은 온도에서는 0 이 됨을 보여라.}$$

- (라)  $T \rightarrow T_N^-$  에서, sublattice magnetization의 크기는

$$M_A = -M_B \approx n\mu_0 \left[ \frac{3(T_N - T)}{T_N} \right]^{1/2} \text{ 처럼 됨을 보여라.}$$