

1994학년도 서울대학교 대학원 자격시험문제

전공: 물리학

(석.박사과정)

1994. 8. 23.

(고전 역학)

주의: 답안은 문항별로 각각 해당 답안
지에 작성하고 각 답안지마다 학번
과 이름을 반드시 기입하십시오.

1. 3차원 공간에서 $\vec{F}(r) = -(K/r^3)\hat{r}$ ($K > 0$)으로 주어지는
중심힘(central force)을 받는 질량 m 인 입자의 운동을
생각하자.

(가) 이 운동은 평면 위에서 일어남을 설명하고, 극좌표
(polar coordinate) r 과 θ 로 나타낸 운동방정식을
구하라.

(나) 여기서 안정한 원궤도(stable circular orbit)는 n
 < 3 인 경우에만 가능함을 보여라.

(다) 입자의 에너지가 반지름 $r = r_0$ 인 안정한 원궤도의
경우 보다 조금 높을 때, 입자의 지름좌표 r 은 각
진동수(angular frequency)

$$\omega = [(3-n)K/mr_0^3]^{1/2}$$

인 단순조화운동(simple harmonic motion)을 하게
됨을 보여라.

(라) 위의 경우에 r 이 $\theta = \theta_1$ 에서 최대값을 가졌다가
궤도운동을 하면서 $\theta = \theta_2$ 에서 다시 최대가 되었다
고 하자. 이 때

$$\Delta\theta \equiv \theta_2 - \theta_1 = 2\pi/(3-n)^{1/2}$$

가 됨을 보이고 따라서 n 이 정수라고 가정하면 닫
힌 궤도(closed orbit)는 $n = -1$ (조화진동자 힘)과
 $n = 2$ (거끝제곱법칙 힘)의 경우에만 가능함을 설명
하라.

* 문제 2 및 3은 다음장에 있음.

1994학년도 서울대학교 대학원 자격시험문제

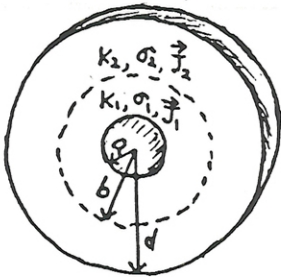
전공: 물리학

(석.박사과정)

1994. 8. 23.

(전기역학)

2. 그림과 같이 공동중심을 가지는 두 도체 공껍질(conducting shell)로 축전기를 만들었다. 안쪽 껍질의 반지름은 a , 바깥껍질의 반지름은 d 이다. 이 두 도체껍질 사이를 반지름이 b 인 구(sphere)로 다시 나누어서 $a < b < d$ 인 영역에는 유전율상수가 k_1 (유전율 $\epsilon = k_1 \epsilon_0$), 전도율이 σ_1 인 물질로, $b < r < d$ 인 영역에는 유전율 상수가 k_2 , 전도율이 σ_2 인 물질로 채웠다고 하자. 두 도체껍질의 전도율은 σ_1 및 σ_2 보다 매우 커서 이 껍질들을 등전위면(equipotential surface)으로 근사할 수 있다.



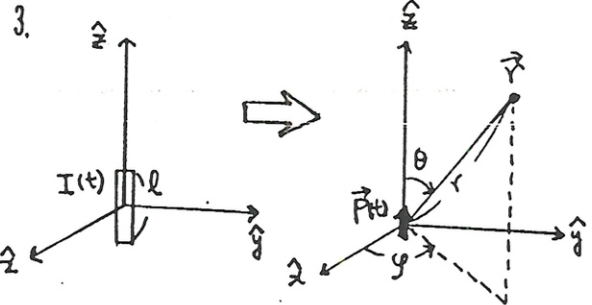
이제 두 도체껍질 사이에 전위차(potential difference) V 를 유지시켜서 정상상태(steady state)에 도달 하도록 하였다.

(가) $r = b$ (채워진 두물질의 경계면)에서의 전류밀도 $\vec{J}$ 에 대한 경계조건은 법선성분이 연속, 즉 $J_{1n} = J_{2n}$ 이 됨을 보여라.

(나) 안쪽 도체껍질의 표면 ($r = a$ 인 면)에 모인 전하량 Q 와 $r = b$ 인 구면 (채워진 두 물질 사이의 면)에 모인 전하량 ΔQ 를 구하라.

(다) 이 축전기의 전기용량 C 를 구하라.

(라) 두 도체껍질 사이의 저항 R 을 구하라.



그림과 같이 길이가 l 이고 z 방향과 평행하게 놓여 있는 저항을 무시할 수 있는 전기쌍극자 (electric dipole) 안테나에 각진동수(angular frequency)가 ω 인 전류가 흐르고 있다. 이 전기 쌍극자

안테나는 $\vec{p} = \hat{z} p_0 e^{i\omega t}$ 로 진동하는 전기쌍극자로 근사하여 생각 할 수 있다. 전기 쌍극자 $\vec{p}$ 는 자유공간 내의 임의의 점 $\vec{r}$ 에

$$\text{vector potential } \vec{A} = \frac{i\omega\mu_0 p_0}{4\pi r} e^{-i(kr - \omega t)} (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}) \text{ 을}$$

만들이 알려져 있다(MKS 단위계 사용). 방사영역 (radiation zone : $kr \gg 1$)에서 아래 물음들에 답하라.

(가) (방사영역인) $\vec{r}$ 에서 자기장 $\vec{H}$ 와 전기장 $\vec{E}$ 는 아래와 같이 주어짐을 보여라.

$$\vec{H} = -\frac{k\omega p_0}{4\pi r} \sin\theta e^{-i(kr - \omega t)} \hat{\phi}$$

$$\vec{E} = -\frac{k^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \sin\theta e^{-i(kr - \omega t)} \hat{\theta}$$

(나) 위치 $\vec{r}$ 에서 Poynting vector 의 시간평균 $\langle \vec{S} \rangle$ 를 구하고, 이로부터 반경 r 인 구의 표면을 지나는 총방사일률 (total radiation power) $\mathcal{W}$ 를 구하라.

(다) 방사저항(radiation resistance) R 을 구하라. [참고: 방사 저항은 이 안테나가 저항을 가지고 있어서 열로 모든 에너지를 잃을 때의 시간평균 일률이 방사일률 $\mathcal{W}$ 와 같게되는 경우에 대응하는 저항값 R 이다.]

(라) 남산에 있는 길이 $l = 0.1$ m 인 한 전기 쌍극자 안테나에서 주파수가 $\nu = 10^8$ Hz 이고, 출력이 10 kW 인 방송파를 내 보내고 있다. 서울대학교에서 이 방송을 수신할 때 검출할 수 있는 전기장의 최고 세기 E_0 을 구하라. 남산과 서울대학교 사이의 거리는 약 10 km 이고, $n \approx 3$, $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 4000$ 으로 근사하라.

o Maxwell Equation

(CGS System)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

(MKS System)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

o 구좌표계 ($\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$)

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_\theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_r) + r \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi \right]$$

$$\nabla \psi = \hat{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

1994학년도 서울대학교 대학원 자격시험문제

전공: 물리학

(석.박사과정)

1994. 8. 23.

(양자 역학)

주의: 답안은 문항별로 각각 해당 답안지에 작성하고, 각 답안지마다 학번과 이름을 반드시 기입할 것.

4. (가) 보어(Bohr)의 수소원자 모형을 이용하여, 지구가 태양 주위를 도는 운동을 기술하여 보자.

(1) 지구 궤도의 주양자수 (principal quantum number) n 을 계산하라.

(다음의 값을 이용하여 대략적인 크기의 차수만 구하여라.

중력상수 $G \approx 10^{-38} / \text{GeV}^2$, $M_\odot$ (태양의 질량) $\approx 10^{57} \text{ GeV}$,

M_E (지구의 질량) $\approx 10^{51} \text{ GeV}$,

1 A.U. (지구와 태양사이의 거리) $\approx 10^{11} \text{ m}$,

자연단위 ($\hbar = 1$)에서 $1 \text{ MeV} = 5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-1}$)

(2) 위에서 구한 n 이 매우 큰 수임에도 불구하고 지구의 궤도가 안정된 이유를 수소원자와 비교하여 설명하라.

(나) 정지상태에서 π^+ 입자는 $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ 와 같이 붕괴한다. 여기서 ν_μ 의 상태함수는, 질량이 각각 m_1, m_2 로 확정된 ν_1 과 ν_2 의 중첩상태로서, $\nu_\mu = \nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta$ 와 같이 주어진다.

(1) μ^+ 의 에너지와 운동량을 측정하면 ν_μ 의 질량을 알 수 있다. 이같은 측정을 한번 했을 때, ν_μ 의 질량은 어떤 값이 얻어지는가?

(2) 위의 측정을 10^6 번 했을 때, ν_μ 질량의 기대값 (expectation value) 을 구하라.

(다) 양전자 e^+ 와 전자 e^- 가 서로 매우 멀리 떨어져 있다가, 모여서 포지트로늄(positronium)의 바닥상태가 되었다. 그동안 방출된 에너지의 양은 몇 eV 인가?

5. 균일한 자기장 H 속에 있는 스핀 $s=1/2$ 의 입자를 생각하자. 자기장은 시간 t ($t=0$ 에서는 $+z$ 방향을 향하다가, 시간 $t=0$ 에서 y 축을 중심으로 회전하기 시작하여 시간 $t=T$ 에 x 축 방향을 향하게 되었다. 입자의 g -factor 는 g 라고 표시하고, 보어 마그네톤 (Bohr magneton)은 μ_B 라 하자. ($\hbar = 1$ 로 놓기로 한다)

(가) 자기장의 방향이 $t=0$ 에서 순간적으로 변화했을 때 ($T \rightarrow 0$ 국한), $t=0$ 에서 입자의 스핀 파동함수 $\psi(t)$ 를 구하라.

(나) 위의 경우에 각 스핀 성분 S_x, S_y, S_z 의 기대값을 시간의 함수로 구하라.

(다) T 가 충분히 큰 경우에, 시간 $t(> 0)$ 에서 자기장 $H(t)$ 의 방향은 z 축과 θ 의 각도를 이룬다고 하자. 이 때 $H(t)$ 방향의 스핀 각운동량 연산자의 고유상태를 $|s, m\rangle_\theta$ 라 하면 (m 은 스핀의 자기장 방향성분 고유값), 다음 식이 성립함을 보여라.

$$\frac{d}{dt} |s, m\rangle_\theta = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} \left[\sqrt{(s+m)(s-m+1)} |s, m-1\rangle_\theta - \sqrt{(s-m)(s+m+1)} |s, m+1\rangle_\theta \right]$$

(라) 위 (다)의 경우에 입자의 스핀 상태 $\psi(t)$ 는 일반적으로 $\psi(t) = \sum_m a_m(t) |s, m\rangle_\theta$ 로 표시할 수 있다. 여기서 계수 $a_m(t)$ 의 시간 의존을 검토하여, 자기장이 충분히 천천히 변할 경우에는 S_x 의 기대값이 시간에 관계없이 $1/2$ 정도가 됨을 보이고, 이것이 성립하기 위한 조건을 써라.

※참고: 각운동량 연산자 J 는 다음식을 만족한다.

$$J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

$$e^{iJ_y \theta} J_x e^{-iJ_y \theta} = J_x \cos \theta - J_z \sin \theta$$

* 문제 6은 다음장에 있음.

1994학년도 서울대학교 대학원 자격시험문제

전공: 물리학 (석.박사과정)

1994. 8. 23.

(통계역학)

6. 헬륨, 아르곤, 제논 등의 기체가 흑연이나 금속 등의 표면에 흡착되는 현상을 기술하기 위해 온도 T 로 유지되는 기체계와 접촉해 있는 고체 표면을 생각하자. 평형 상태에서 일부 입자들은 고체 표면에 흡착이 되고 나머지는 기체 상태로 남아 있어서 압력 p 를 미친다. 흡착된 입자의 배열은 사각격자(square lattice)를 이루며 고체 표면의 격자점의 수는 V 라 하자. 이렇게 이루어진 격자계의 입자는 운동에너지가 없고 흡착·증발 과정에 의해 기체계와 평형을 이룬다.
- (가) 평형상태에서는 기체계와 격자계의 화학퍼텐셜 μ 가 같아야 한다. 그 이유를 설명하라.
- (나) 기체계의 μ 를 p , T 및 열파장(thermal wavelength) $\lambda [= h/(2\pi m k_B T)^{1/2}]$ 로 표시하고 $p = 10^6$ Pa, $T = 300$ K = 25.8 meV 일 때 그 값을 계산하라.
- (다) 격자계의 격자점에는 하나 이상의 입자는 붙을 수 없다. 흡착에너지가 ε (< 0)이고 그 외의 상호작용은 없어서 N 개의 입자가 흡착된 격자계의 에너지는 $N\varepsilon$ 인 경우를 생각하자. 이 계의 큰 정준 분배함수(grand-canonical partition function)를 구하고 밀도 $\rho = \langle N \rangle / V$ 를 T , μ , ε 의 함수로 구하라.
- (라) 여기서 바로 이웃한 격자점에 자리 잡은 입자들 끼리는 밀치는 상호작용이 작용하고 그 에너지는 짝당 J (> 0)인 경우를 생각하자. 평균장 근사(mean-field approximation)를 사용하여 N 개의 입자가 흡착된 상태의 에너지 및 엔트로피를 ρ 의 함수로 구하고 이로부터 ρ 를 결정하는 식을 세워라.