물리학과 대학원 자격시험

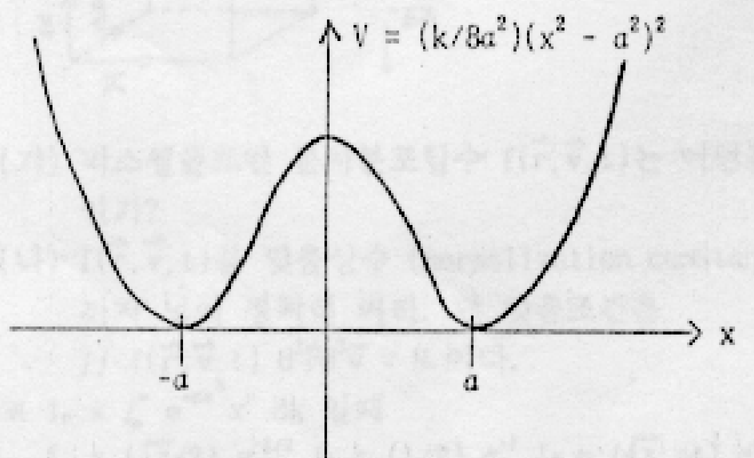
과목명 (양자역학 및 통계역학) 1995. 1. 26.

(양자역학)

1. 질량 m인 1차원 입자의 하밀토니안이

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{8a^2}(x^2 - a^2)^2$$

와 같을 때, 주어진 포텐셜 (그림 참조)이 $x=a$ 근처에서는 $V_R(x) = (k/2)(x - a)^2$ 처럼 그리고 $x=-a$ 근처에서는 $V_L(x) = (k/2)(x + a)^2$ 처럼 근사됨에 유의해서 이 계를 근사적으로 다루어 보기로하자.



(가) 이 계의 에너지 고유상태는 항상 반전현산자 (parity operator)의 고유상태로 취할 수 있다. 왜 그런가?

(나) $\psi^{(0)}{}_R(x)$가 하밀토니안 $H_1 = \frac{p^2}{2m} + V_R(x)$의 기저상태, $\psi^{(0)}{}_L(x)$는 하밀토니안 $H_2 = \frac{p^2}{2m} + V_L(x)$의 기저상태를 나타낸다고 하고 이 두 상태들을 기저(basis)로 하는 선형공간 에서 H의 (근사적) 고유상태를 찾는다면, 나오는 두 고유상태는 어떻게 주어지며, 또 이 두 상태 사이의 에너지 간격 (energy gap)은 얼마인가? [※ 여기서 $\psi^{(0)}{}_R(x)$ 및 $\psi^{(0)}{}_L(x)$는 규격화 되었으며, 또 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_L^{(0)*}(x)\, H\, \psi^{(0)}{}_R(x) = B$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_L^{(0)*}(x)\, \psi^{(0)}{}_R(x) \approx 0$로 놓고 B 값은 주어진 것으로 생각할 것.]

(다) 이제 동일한 근사아래 t=0에서 입자의 파동함수가

$$\psi(x, t=0) = \psi^{(0)}{}_L(x)$$

와 같다면, 이 입자의 시간 $t(>0)$에서의 파동함수 $\psi(x,t)$는 어떻게 표시되는가? 또 그 결과로 부터 한 입자가 $x = -a$ 및 $x = +a$에 위치한 포텐셜 우물 사이를 왔다갔다 하는 운동의 진동수 ω를 구하라.

2. Hydrogen-like한 원자에서 spin-orbit interaction을 고려하면 전자의 하밀토니안은 $H = H_0 + f(r)\,\vec{L}\cdot\vec{S}$ 형태로 표현된다. 여기서 H_0는 $\vec{L}$ 및 $\vec{S}$의 각 성분과 commute하고, 그것의 고유치를 $E^{(0)}{}_{n\ell}$ (n은 주양자수)로 나타내자.

(가) 이 계의 하밀토니안 H는 연산자 $\vec{L}^2$, $\vec{S}^2$, J_z, $\vec{J}^2$ (여기서 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$임) 들과 commute함을 보여라.

(나) 함수 f(r)은 $f(r) = \frac{\hbar^2}{2m_e^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)$ 처럼 쓸 수 있는데 spin-orbit interaction 항이 이와같이 주어지는 물리적 근거를 간단히 설명하라.

(다) spin-orbit항을 섭동항으로 취급할 때 에너지 준위 $E_{n\ell j}$ 는 total 각운동량 양자수 j의 값에 따라 어떻게 split하는가? (단 1차 섭동 까지만 생각하고 $\langle n\ell|\frac{\hbar^2}{2m_e^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)|n\ell\rangle = f_{n\ell}$이라고 놓아도 좋다).

(라) 이 원자를 약한 자기장 $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 아래 놓는다면 이 계의 하밀토니안은 어떻게 바꾸어지는가? 또 에너지 준위에 이 자기장 때문에 생기는 변화를 말하라.

3. 어떤 3차원 포텐셜 $V(\vec{r})$이 주어져 있을 때 에너지 $E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$을 갖고 입사하는 입자의 산란파동함수 $\psi(\vec{r})$은 일반적으로

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\,\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\,V(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')$$

와 같은 적분방정식을 만족한다. 다음 물음에 답하라.

(가) 위의 적분방정식에서 시작해서 wave vector $\vec{k}$로 입사하여 $\vec{k}'$ 방향으로 산란될 때의 산란진폭 (scattering amplitude) $f(\vec{k}, \vec{k}')$를 $V(\vec{r})$ 및 파동함수 $\psi(\vec{r})$에 관련된 적분식으로 표시해 보아라.

(나) 산란진폭은 1차 Born 근사에서 어떻게 주어지는지 말하고, 특히 포텐셜이 구대칭인 경우에는 (즉 $V = V(r)$, $r = |\vec{r}|$) 이 Born 근사에서의 산란진폭은

$$f_B(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2|\vec{q}|}\int_0^{\infty} rV(r)\,\sin(|\vec{q}|r)\,dr$$

처럼 주어짐을 보여라.

(여기서 $|\vec{q}| = 2k\sin(\theta/2)$, θ는 $\vec{k}$와 $\vec{k}'$ 방향 사이의 각도임)

(다) 1차 Born 근사를 Coulomb-type 포텐셜 $V = \alpha/r$ (α는 상수)에 적용해서 미분산란단면적 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 를 구해 보아라.

(※ $V = \alpha/r$ 은 Yukawa potential $V = (\alpha/r)e^{-\epsilon r}$의 $\epsilon \to 0^+$ 극한으로 생각해도 좋다.)

(라) Coulomb 포텐셜은 long-range 포텐셜이기 때문에 total cross section σ^{tot}은 발산하지만 short-range 포텐셜의 경우엔 일반적으로 σ^{tot}이 유한하다. 후자의 경우 포텐셜이 구대칭이라고 가정하고 σ^{tot}을 1차 Born근사에서 계산하면 아주 높은 에너지에서

$$E \to \infty: \quad \sigma_B^{tot} \sim \frac{(\text{const})}{E}$$

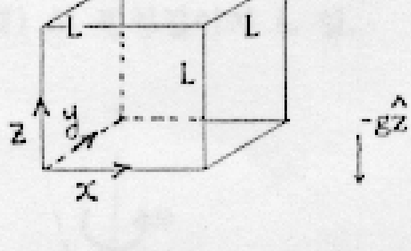
와 같이 됨을 보여라.

물리학과 대학원 자격시험

과목명 (양자역학 및 통계역학) 1995. 1 . 26 .

(통계역학)

4. 한변이 L인 정육면체 그릇에 갇힌 질량 m으로 된 N개의 질점 기체(이상기체)가 균일한 중력마당에 놓여있다. 이 기체가 온도 T로 열평형을 이루었을 때 다음 물음에 답하라.



단 밑면을 x,y로 하는 좌표계로 잡고 중력마당을 $-g\hat{z}$로 표기한다.

(가) 막스웰볼쯔만 분자분포함수 $f(\vec{r},\vec{v},t)$는 어떤꼴인가?

(나) $f(\vec{r},\vec{v},t)$를 맞춤상수 (normalization constant) 까지 넣어 정확히 써라. 단 맞춤조건은 $\iint f(\vec{r},\vec{v},t)\, d^3r d^3v = N$ 이다.

※ $I_n = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n\, dx$ 일때

$I_0 = (\sqrt{\pi}/2)\, \alpha^{-1/2}$, $I_1 = (1/2)\, \alpha^{-1}$, $I_2 = (\sqrt{\pi}/4)\, \alpha^{-3/2}$ 이다.

(다) 위의 분포함수를 써서 높이 z에서의 평균제곱속도 $\langle v^2\rangle_z$를 구하라.

(라) (다)의 결과를 써서 높이 z 되는 점의 압력 $P(z)$를 구하라.

(마) $\bar{P} = \frac{1}{L}\int_0^L P(z)\, dz = \dfrac{NkT}{V}$ 임을 보이라.

(단 $V = L^3$이다.)

5. 그림과 같이 N개의 spin pair (각 spin은 S=1/2의 경우에 해당) 를 생각하자.

(↑↑) (↓↑) (↓↓) .....

spin의 자기쌍극자능률은 $\mu(>0)$ 이고 자기장 H 안에서 온도 T를 가지고 평형상태를 이룬다. spin pair 들 사이에는 상호작용이 없고, pair 내에는 exchange interaction이 있어서 그 에너지가 (↑↓) 나 (↓↑) 의 경우에는 $\epsilon(>0)$ 그리고 (↑↑) 나 (↓↓) 의 경우에는 $-\epsilon$ 와 같이 주어진다고 하자.

(가) 이 계의 분배함수 (partitian function)을 구하라.

(나) $e^{\mu H/kT} \gg 1$ (즉 저온에서) 인 조건 하에서 이 계의 엔트로피와 magnetization을 구하시오. [단 $M = kT \dfrac{\partial \ln Z}{\partial H}$ 임에 유의]

(다) adiabatic 하게 H를 감소시키는 경우 H=0 일 때의 온도를 초기온도 T_0, 초기자기장 H_0로 나타내라 [※ (나)의 공식을 이용하되 $H \approx 0$에서 $e^{\mu H/kT} \gg 1$ 의 조건이 만족되지 않는다는 사실은 무시하고 생각해도 좋다.]

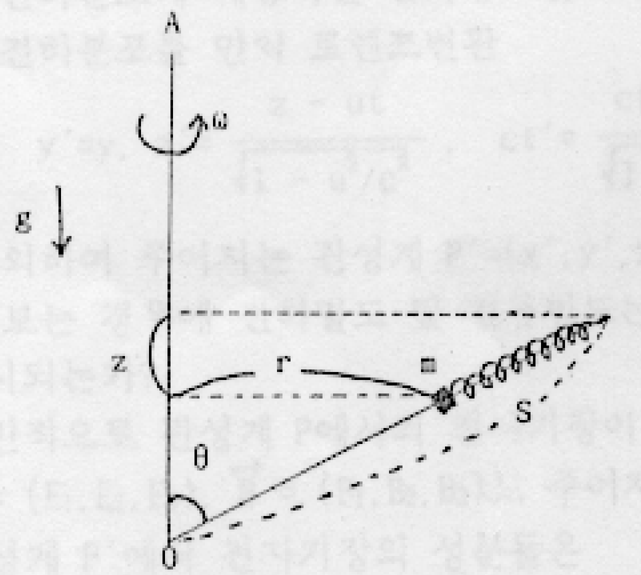
(라) 이제 $2\mu H/kT = x$, $\epsilon/kT = y$, 라고 할 때, $x, y \ll 1$ (즉 고온에서) 인 조건 하에서 엔트로피를 x,y의 2차 항 까지 구하라. 이 경우 다시 adiabatic하게 자기장을 감소시키는 경우 H=0에서의 온도를 초기자기장 H_0, 초기온도 T_0의 함수로 나타내라.

물리학과 대학원 자격시험

과목명 (고전역학 및 전자기학)　　　　1995. 1. 26.

(고전역학)

1. 그림과 같이 $\angle AOF = \theta$ 로 꺽어진 철사구조물이 연직면에 놓여있고, 직선 AO를 축으로 일정한 각속도 ω로 회전하고 있다. 길이가 S인 철사부분 OF의 끝점 F에 고정된 용수철 (spring constant는 k)이 철사를 따라 마찰없이 움직인다고 할 때, 다음 물음에 답하라. 단 철사 및 용수철의 질량은 무시하고 용수철은 (늘고있지 않을 때) 그 평형길이가 ℓ_0 임.



(가) 수직거리 z (그림 참조)를 일반화좌표로 이 계의 라그란지안을 구하라.

(나) 운동방정식을 구하라.

(다) 용수철의 진동이 없을 때의 z 값은?

(라) $\omega^2 < \dfrac{k}{m \sin^2\theta}$ 일 때 질량 m은 일반적으로 어떤 운동을 하는가?

2. 운동에너지 E를 갖고 질량 m인 입자들이 멀리서 부터 $V(\vec{r}) = \dfrac{K}{r^2}$ (K는 상수, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 포텐셜에 입사해서 산란되는 경우를 고전역학의 관점에서 생각하자. (r, ϕ 는 운동 평면상의 극좌표임)

(가) 입자의 궤도방정식 $r = r(\phi)$ 는 $u \equiv (1/r)$ 을 ϕ의 함수로 보고, 먼저 u가 만족하는 미분방정식을 유도한 후 그 것을 풀면된다. 이와 같은 방법으로 위 입자의 경우 (에너지는 E, 각운동량의 크기는 L로 놓을 것) r을 ϕ의 함수로 구하라.

(나) (가)의 결과를 이용해서 K>0 일 때 산란각 θ를 충돌맺음변수 (impact parameter) b의 함수로 나타내보아라.

(다) 이 때 미분산란단면적은

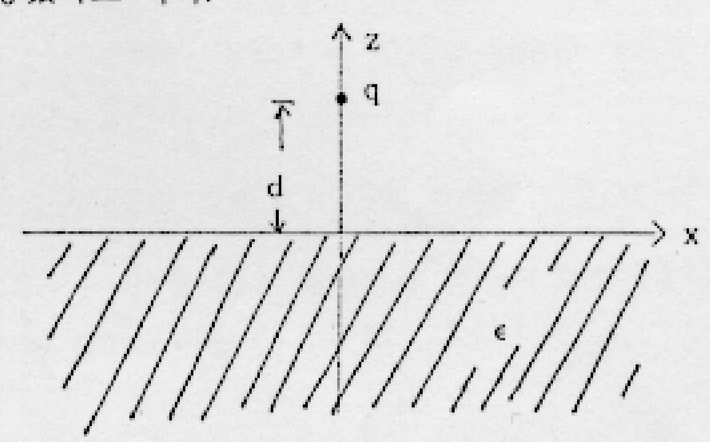
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{K\pi^2}{E \sin\theta} \; \frac{\pi - \theta}{\theta^2 \, (2\pi - \theta)^2}$$

처럼 주어짐을 보어라.

(라) K가 음수일 때는 멀리서 입사한 입자가 힘의 중심으로 떨어져 버리는 현상도 가능한데, 이 경우를 간단히 설명하고 그렇게 떨어질 유효단면적 (effective cross section)을 구하라.

(전기역학)

3. 그림과 같이 $z < 0$인 영역에는 유전상수가 ϵ인 유전체가 차 있고, $z > 0$인 영역에서는 진공의 상태이다. 이 때 점전하 q를 $x = y = 0$, $z = d$ (>0)인 점에 가져다 놓았다고 하자.



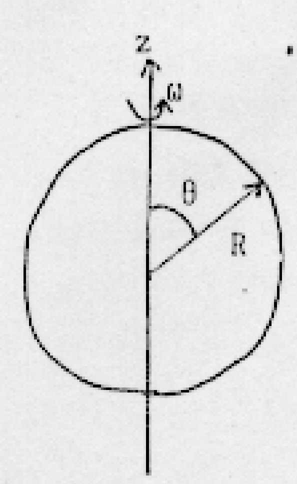
(가) Image 방법을 사용하여, $z > 0$인 영역과 $z < 0$인 영역에서 정전기포텐셜 (electrostatic potential)을 구하라.

(나) 점전하 q 및 유전체가 느끼는 힘의 크기와 방향을 결정하라.

(다) 경계면에서 polarization 전하밀도를 구하라. 이 결과로 부터 도체표면에서 d 만큼 떨어진 점전하의 경우에 유도된 전하밀도를 유추할 수 있는가?

4. 반경이 R인 도체로 이루어진 구 (단 $\mu=1$)를 대전시켜 구의 정전기포텐셜이 V_0가 되도록 한 다음, 이 구를 직경을 축으로 ω의 각속도로 회전을 시켰다고 하자. (회전축을 z 축으로 잡을 것)

(※ (나)-(라)에서는 경계조건 문제로 문제를 해결하기 위하여 자기스칼라포텐셜 (magnetic scalar potential) Φ_M을 $r < R$ 및 $r > R$ 공간 각각에서 도입해서 생각할 것. 이 때 $\vec{B} = -\nabla\Phi_M$ 임에 유의)



(가) 표면전하밀도 σ 및 표면전류밀도 $\vec{K}$를 구하라.

(나) $r = R$ 에서 Φ_M이 만족해야 하는 경계조건을 써라.

(다) 모든 공간에서 Φ_M을 구하라.

(라) $r > R$인 공간에서 자기장 $\vec{B}$를 구하고, 그 결과식에 간단한 물리적 해석을 부여하라.

물리학과 대학원 자격시험

명 (고전역학 및 전자기학) 199 5. 1 .

관성계 P = (x,y,z,t)에서 원점을 지나 z축 방향으로 무한히 긴 아주 가는 실린더에 단위 길이당 정전하 밀도가 σ로 주어졌다면

$$\rho(\vec{r},t) = \sigma\,\delta(x)\delta(y) \quad ,\ (\sigma\text{는 상수})$$

처럼 쓸 수 있을 것이다. 다음 물음에 답하라.

(가) 위 전하분포에 대응하는 전기장 $\vec{E}$는 ?

(나) 이 전하분포를 만약 로렌쯔변환

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=\frac{z-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ ,\quad ct'=\frac{ct-(u/c)z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

에 의하여 주어지는 관성계 P′=(x′,y′,z′,t′)에서 보는 경우에 전하밀도 및 전류밀도는 어떻게 표시되는가?

(다) 일반적으로 관성계 P에서의 전자기장이 $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$로 주어지는 경우, 관성계 P′에서 전자기장의 성분들은

$$E_1'=\frac{E_1-(u/c)B_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ ,\quad E_2'=\frac{E_2+(u/c)B_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ ,\quad E_3'=E_3$$

$$B_1'=\frac{B_1+(u/c)E_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ ,\quad B_2'=\frac{B_2-(u/c)E_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\ ,\quad B_3'=B_3$$

처럼 주어지게된다. 그 근거를 간단히 설명하라.

(라) 이 로렌쯔변환 관계식과 (가)의 결과를 사용해서 이제 같은 실린더에 정전하분포 대신 전류 I가 흐르는 경우 이에 대응하는 자기장을 구해보아라.