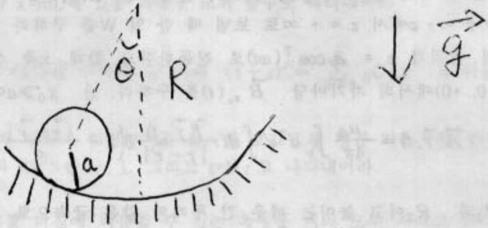
29회

1998 학년도 서울대학교 대학원 자격시험 문제

전공: 역학 (석사과정)

1998. 1. 22

1. 아래 그림과 같이 반지름 a, 질량 m을 가진 균일한 밀도의 쇠구슬이 반지름 R인 곡면상에서 운동하고 있다고 하자 ($a<R$). 이때 운동은 xy 평면상에 국한되며 중력은 -y 방향이다. 또 마찰에 의한 에너지 손실은 무시한다.



가) 구의 질량 중심축을 중심으로 한 관성능률 (moment of intertia) I를 구하라.

나) 구가 질량 중심축을 중심으로 돌지 않는다고 할 때 (완전 미끄럼 운동) Lagrangian을 구하고 이를 이용하여 $\theta=0$ 근처에서의 운동을 기술하라.

다) 구가 미끄러지지 않고 도는 경우의 Lagrangian을 구하고 역시 $\theta=0$ 근처에서의 운동을 기술하라.

2. 1차원 (x 방향) 스프링에 달린 질량을 생각하자. 이때 질량은 m, 스프링 상수는 k이며 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 이라고 하고 마찰이나 중력은 무시한다. 정지 상태에 있는 이 계에 x 방향으로 다음과 같은 힘이 주어진다: $F(t)=Re(\dfrac{P_0}{2\tau}e^{-\frac{|t|}{\tau}+i\omega t})$

가) 운동 방정식을 구하라.

나) $\tau\ll\dfrac{1}{\omega_0}, \dfrac{1}{\omega}$ 라면 이 물체의 변위 x(t)를 구하라.

다) $\omega_0, \omega, \omega_0-\omega\gg\dfrac{1}{\tau}$; $\omega_0>\omega>0$인 경우, 질량의 운동은 $x(t)\approx\dfrac{P_0}{2m\tau(\omega_0^2-\omega^2)}Re(e^{-\frac{|t|}{\tau}+i\omega t})$ 로 기술됨을 보여라. 단 이때 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=Ae^{i\omega' t}$의 해는 $x=\dfrac{A}{m}\dfrac{e^{i\omega' t}}{\omega_0^2-\omega'^2}$ 이며

$$Re(e^{-\frac{|t|}{\tau}+i\omega t})=Re(\frac{1}{\pi\tau}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{e^{i\omega' t}}{[(\omega-\omega')^2+\frac{1}{\tau^2}]})$$ 임을 이용할 수 있다.

라) 다)의 운동을 개략적으로 시간의 함수로 그리고, 감쇠가 없는데도 불구하고 시간이 오래 지난 후에 운동이 사라지는 이유를 물리적으로 설명하라.

1998 학년도 서울대학교 대학원 자격시험 문제
전공: 전자기학 (석사과정)

1998. 1. 22

3. 무한히 넓고 얇은 평면 도체판이 xy면에 접지되어 놓여 있고, 점전하 +Q가 z-축상의 한 지점 $+a$에 위치하여 있다.

가) $|\vec{r}| \gg a$ 인 $\vec{r}$ 에서 전기 퍼텐셜 $V(\vec{r})$와 전지마당 $\vec{E}(\vec{r}, t)$를 구하라.

나) 이 전하를 $z = +a$에서 $z = +\infty$로 보낼 때 한 일 W를 구하라

다) 이 전하의 위치가 $z = a\cos^2(\omega t)$로 진동한다고 할때, x축 상의 진공중의 한 지점 $\vec{r} = (x_0, 0, +0)$에서의 자기마당 $\vec{B}_{x_0}(t)$를 구하라. 단 $x_0 \gg a$이다.

$$\text{Hint : } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \int dt' \frac{\vec{I}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,\delta\!\left(t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t\right)$$

4. 반경이 R_1과 R_2이고 높이는 매우 긴 두개의 얇은 금속으로 된 동심축 원통(coaxial cylinder) 축전기가 있다. 이 두 원통사이는 공기로 채워져 있고, 전기마당이 E_b 일때 유전성 깨짐(dielectric breakdown)이 일어난다. 단 $R_1 < R_2$이고, 공기의 유전상수는 ε_0이다

가) 유전성 깨짐이 일어 날때 각 원통의 길이당 전하밀도 λ를 구하라.
(유전성 깨짐은 축전기 내의 어느 한 점의 전기마당이 E_b보다 커지면 일어남)

나) 유전성 깨짐이 일어날 때 축전기에 걸리는 전압 V_b를 구하라.

다) 만일 R_2을 고정시키고 R_1 를 조절하여 V_b를 최대로 만들려고 한다면, 이 때의 R_1 을 구하라.

라) 유전성 깨짐이 일어날 때 축전기에 저장된 단위 길이당의 에너지 W_b를 구하라.

5. 반지름이 a, 질량이 m인 고리 모양의 전선이 xy평면 위에 놓여 있고, 이 고리를 따라 전류 $i(t) = \dfrac{i_0}{1 + \left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2}$ 가 시계 반대 방향으로 흐르고 있다. 여기서 i_0와 τ는 상수로 $\tau \gg \dfrac{a}{c}$ (c: 광속도)이고, 전선의 저항은 영(0)이다.

가) 고리의 중심에서의 자기 쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}_0(t)$를 구하라.

나) z축상의 임의의 점 P=(0,0, l) 에서의 자기 마당 $\vec{B}_P(t)$를 구하라. 단 $\dfrac{l}{c} \ll \tau$ 이다.

다) 반경이 b이고, 저항이 R인 고리가 점P를 중심으로 xy평면에 나란하게 놓여있다. $b \ll a$ 일때 이 고리에서의 전류 $i_b(t)$를 구하고, 이를 그림으로 그려라.

라) 반경이 a인 전선이 $\vec{B} = B_0\hat{x}$인 자기마당에 놓여 있을때, $t \gg \tau$일때 전선의 운동을 기술하라. 이 경우 m이 충분히 커서 $t \sim \tau$인 시각에도 고리가 xy면을 벗어나지 않는다고 가정하라.

1998 학년도 서울대학교 대학원 자격시험 문제
전공: 통계역학 (석사과정)

1998. 1. 22

6. 퍼짐 (diffusion)현상을 x축상의 1차원 막걷기 (random walk)현상으로 비유해 보자. 시간 t=0에서 원점을 출발한 걷는이는 일정 너비 L만큼의 걸음을 좌우 같은 확률 1/2로 마구잡이로 내딛는다. 시간 t에 N걸음을 내딛었다고 하자. 다음 물음에 답하라. 단 N은 매우 큰수이다.

가) N걸음 후에 걷는이가 x=mL에 있을 확률을 m의 함수로 나타내어라.

나) N걸음 후에 $\langle x\rangle$와 $\langle x^2\rangle$을 구하라. 단 이때 $(1+x)^N=\sum_{n_1=0}^{N} {}_N C_{n_1} x^{n_1}$ 을 이용하라.

다) 퍼짐 현상과 비유하기 위하여 막걷는이를 분자라 보고 L을 평균 자유거리, 한걸음 내딛는 시간을 τ 라고 하자. $\langle x\rangle$와 $\langle x^2\rangle$을 τ, L, 그리고 t=Nτ로 나타내어라.

라) 다)의 결과는 막걷기를 퍼짐에 비유할 수 있는 특징을 거의 모두 지니고 있다. 이를 설명하라.

마) 퍼짐은 안되짚기 과정이다. 엔트로피는 시간에 따라 증가한다. 엔트로피를 시간의 함수로 나타내어라.

7. 어떤 물리계가 갖는 특정한 에너지 준위 ε_1을 생각하자. (이 물리계가 가지는 다른 에너지 준위들은 아래 문제들을 푸는데 관련이 없다). 이 물리계는 온도 T인 thermal reservoir와 평형을 이루고 있으며 입자의 교환도 가능하다. 아래 물음에 답하라.

가) 이 물리계가 전자로 되어 있어서 ε_1 준위에 두 개의 전자 (스핀 up/down) 까지 동시에 존재할 수 있으며 만약 두 개의 전자로 채워진 경우 상관 에너지가 $\Delta>0$ 이다 (즉 전체 에너지=2ε_1+Δ). fugacity (또는 absolute activity)를 $Z\equiv e^{\frac{\mu}{kT}}\equiv e^{\mu\beta}$라고 표시할 때 ε_1 에너지 준위를 채우는 전자수의 기대치를 구하라. 이때 Grand partition function G를 이용하고 $\langle N\rangle = Z\frac{\partial}{\partial Z}\ln G$를 쓰면 편리하다.

나) 이 물리계가 스핀이 0인 boson으로 되어 있어서 ε_1 준위를 임의의 개수만큼 채울 수 있다. 단 m (m≥1) 개가 차있을 때의 상관 에너지는 (m-1)Δ라고 한다 ($\Delta>0$). 이때 ε_1 준위를 채우는 boson 개수의 기대치를 Z의 함수로 구하라.

다) 다시 가) 문제로 돌아가 ε_1=0, $e^{-\beta\Delta}$=0.8이라고 하자. ε_1을 채우는 전자수의 기대치가 1일때의 Z값을 구하고 그 값이 1보다 크거나 작은 이유를 한두 문장으로 기술하라.

라) 나) 문제로 돌아가 역시 ε_1=0, $e^{-\beta\Delta}$=0.8라고 하자. ε_1 준위를 채우는 boson수의 기대치가 1이라고 할 때 Z값을 구하라.