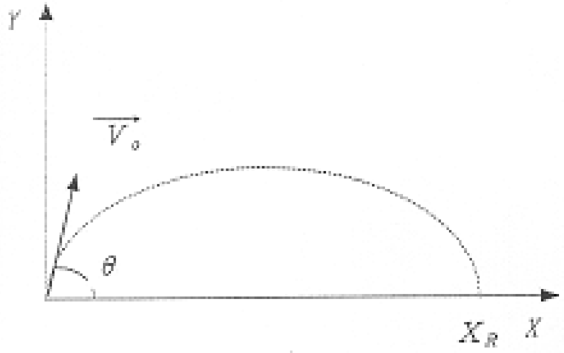
2001학년도 제1학기 대학원 논문제출 자격시험 문제지

과 목 : 역학 (석사과정)

2001 . 01. 13.

1. 그림과 같이 원점에서 질량 m 인 물체를 속력 V_0, 방향 θ로 던졌다고 하자. 이 때 공기 저항이 있고, 그 저항에 의한 힘이 $-b\vec{V}$ 이다. 중력가속도는 g라고 표기하고, $k=\frac{b}{m}$ 이다.



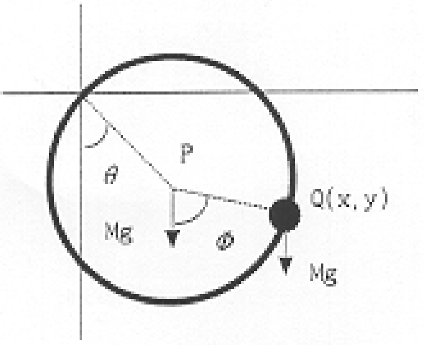
(가) X, Y 좌표축을 그림과 같이 잡을 때, Y 방향의 속도를 $V_y(t)=A+Be^{-kt}$ 로 표기할 수 있다면, 이 때 A와 B를 구하라.

(나) t 초 후의 물체의 위치를 구하라. ($k\to 0$인 한계에서의 값을 구하라)

(다) 공기저항이 작을 때 물체가 땅에 떨어지는데 걸리는 시간 T를 구하고, k의 1 차항까지 어림셈을 해서, 이 시간이 b=0 일 때 보다 $1-\frac{kV_0\sin\theta}{3g}$ 배만큼 줄어드는 것을 보이라.

(라) 땅에 닿는 거리 X_R은 k=0 일 때에 비해 얼마나 줄어드는가? k의 1차 항까지 표시하라.

2. 질량이 M 인 균일한 훌라후프 고리를 따라 마찰 없이 자유스럽게 움직일 수 있는 질량 M 인 추가 달려있다. 훌라후프의 반지름이 R 이며, 훌라후프는 좌표원점에 한 개의 못으로 고정되어 원점을 주위로 흔들거릴 수 있게 걸려 있다. (그림 참조)



훌라후프의 질량중심 P점과 이루는 각을 θ, 추가 있는 점 Q 와 P가 만드는 각을 Φ라고 하고 물음에 답하라.

(가) 훌라후프의 원점에 대한 관성 능률을 구하라.

(나) 이 계의 운동에너지와 퍼텐셜에너지를 θ, Φ 각들의 함수로 구하라.

(다) θ, Φ 각들이 모두 작다고 가정하여, 미세한 흔들림으로 가정하고 라그랑지안을 두 각의 2 차항까지만 취한 어림으로 라그랑지안을 설정하라. 두 각에 대한 운동방정식을 구하라.

(다) 이 흔들림의 고유진동수(eigenfrequency)를 구하라.

(라) 이 흔들림의 기준방식(normal mode)들을 구하고 그 운동을 설명하라.

2001학년도 제1학기 대학원 논문제출 자격시험 문제지

과 목 : 전기역학

(석사과정)

2001 . 01. 13.

1. 외부 자석에 의하여 아주 반경이 R인 큰 공간 내에 자기장이 걸려 있고, 주위에 흐르는 전류는 없다. 이 경우 원점 부근의 자기장은 다음과 같은 자기 스칼라 포텐셜로 표현된다.

$$\Phi_{ex} = -B_0 r P_1(\cos\theta) - B_1 r^2 P_2(\cos\theta)$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

이다.

(가) 원점 부근의 자기장을 직각 좌표계와 극 좌표계에서 각각 구하라.

(나) 반경이 a이고, 투과성(permeability)이 μ인 구가 r=0 인 위치에 놓였다. 이 때 구의 안 밖에서의 자기장을 구하라 (편리한 좌표계를 사용하라). 이 때 $a \ll R$ 이다.

(다) 외부 자기장을 변화시키지 않을 만큼 약한 자기쌍극자 $\vec{m}$이 이 구의 바깥에 있다. 이 쌍극자가 받는 힘과 토크를 구하라.

2. 자유 전하와 전류가 없는 공간의 특성은 μ와 ε으로 표현할 수 있다.

(가) 이 때 막스웰 방정식으로부터 $\vec{E}$와 $\vec{H}$가 만족하는 파동방정식 (wave equation)을 구해보고 전자기파의 파동의 속도를 구하라.

(나) 도파관(wave guide)의 내부에서 $\vec{E}$와 $\vec{H}$의 성분들은 z-방향으로 움직이는 파동의 형태인 $\psi(x,y,z,t) = \psi_0(x,y)\, e^{i(k_g z - \omega t)}$라고 가정하자. 이 때 ψ_0가 만족하는 미분 방정식으로부터 k_g 와 끊어버림 떨기수 (cutoff frequency)(ω_c)의 관계를 유도하고, 파동이 진행할 수 있는 조건을 구하라.

(다) 가로가 a 이고 세로가 b 인 직사각형의 도파관의 가로의 전기장 모드(Transverse Electric(TE) mode)를 고려해보자. 이 때 $H_z(x,y)$, $E_x(x,y)$, $E_y(x,y)$는 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$H_z(x,y) = H_0 \cos k_1 x \cos k_2 y$$

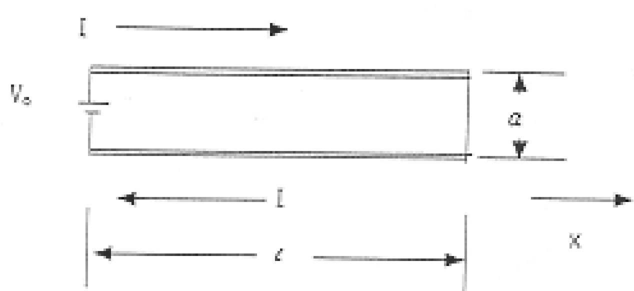
$$E_x(x,y) = -E_0 k_2 \cos k_1 x \sin k_2 y$$

$$E_y(x,y) = E_0 k_1 \sin k_1 x \cos k_2 y$$

이들의 경계조건으로부터 끊어버림 떨기수 (cutoff frequency) 를 구해보라.(단 도파관의 내부는 완벽한 도체이고 $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ 라고하자)

(라) 직사각형의 도파관이 가로 8 cm, 세로 6 cm하고 하면 주파수 $\nu = 4 \times 10^9$ Hertz인 파동이 이 도파관을 통과할 때 가능한 모든 TE mode를 구해보라

3. 아래의 그림과 같이 길이가 l 이고 깊이가 b (종이면에 수직 방향의 깊이)인 두 개의 평행한 도체 판이 a ($a \ll b,\ l$)만큼 떨어져 있고 오른쪽 끝은 철사줄로 연결되고, 왼쪽 끝은 전압이 V_o 인 전지에 t=0에 연결되었다. 이 때 전류는 x-축에 평행하게만 흐른다고 가정하고 모든 저항을 무시하기로 하자.



(가) 두 도체판 사이의 자기장 B 와 전류 I의 관계를 유도하라

(나) 이 회로의 자기유도상수(self-inductance)를 구하라.

(다) 이 회로에 흐르는 전류를 시간의 함수로 나타내라.

(라) 두 도체판 사이의 전압을 오른쪽 끝으로 부터의 길이 x 에 대한 함수로 나타내라.

(마) 일률을 오른쪽 끝으로 부터의 길이 x 에 대한 함수로 나타내라.

2001학년도 제1학기 대학원 논문제출 자격시험 문제지

과 목 : 양자역학 (석사과정)

2001 . 01. 13.

1. 수소 분자의 두 전자들의 해밀토니안을 H 라고 하고, 각 전자의 스핀 각운동량을 $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$ 라고 하자. 이들은 $[H, \vec{S_1}+\vec{S_2}]=0$ 를 만족한다.

(가) $\vec{S}^2=(\vec{S_1}+\vec{S_2})^2$ 및 $S_z=S_{1z}+S_{2z}$ 가 가질 수 있는 고유치의 값은?

(나) 가)에서의 고유치에 대응하는 스핀파동함수 $|s,s_z\rangle$ 들을 $|s_{1z},s_{2z}\rangle$ 들로 표시해 보라. 여기서

$$S_z|s,\ s_z\rangle = s_z\hbar|s,\ s_z\rangle$$

$$\vec{S}^2|s,\ s_z\rangle=s(s+1)\hbar^2|s,\ s_z\rangle$$

이고, 모든 파동함수는 규격화(normalize)된 것으로 간주한다.

(다) 두 전자 사이에 전기적인 상호작용 부분을 V 라고 하여, $H=H_0+V$ 로 표시하자. 먼저 V를 무시하고, H_0 에 의한 공간파동함수를 두 전자의 좌표 교환에 대해 대칭인 $\phi_S(\vec{r_1},\vec{r_2})$ 와 반대칭인 $\phi_A(\vec{r_1},\vec{r_2})$ 로 표기할 때, 두 전자의 바닥상태를 위에서 얻은 스핀파동함수와 결합해서 표시하라.

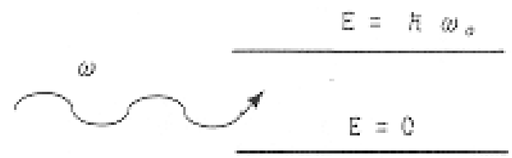
(라) 두 전자의 밀치는 전기작용 V 를 건드림(perturbation)으로 취급하여, H 에 대한 바닥상태가 다)에서 구한 바닥상태 파동함수 중에 어떤 형태이어야 하는가를 정하고 그 이유를 설명하라.

2. 그림과 같은 두 에너지 준위 만을 갖는 계(two level system)에 t=0 에서 갑자기 빛을 쪼여주기 시작했다고 하자. 진동수가 ω 인 이 빛의 전기장은 $\varepsilon_0\cos\omega t$ 이고, 계의 전기 쌍극자능률은 μ 일 때, 이 계의 바닥상태와 들뜬상태의 파동함수를 각각 ϕ_1, ϕ_2 라고 하면, 계의 파동함수 $\Psi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ 에 작용하는 해밀토니안은 다음과 같이 표기된다.

즉

$$H=\begin{bmatrix}0 & -\theta(t)\mu\varepsilon_o\cos\omega t\\ -\theta(t)\mu\varepsilon_o\cos\omega t & \hbar\omega_o\end{bmatrix}$$

여기서 $\theta(t)=\begin{cases}1,(t\ge0)\\ 0,(t<0)\end{cases}$ 이다.



(가) 바닥상태와 들뜬상태가 만족하는 슈뢰딩거 방정식을 적어라.

(나) 초기에 모든 전자는 바닥상태에 있었다고 하자. 즉 $t\le0$ 에서 $\Psi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ 이었다. 들뜬상태의 에너지가 $\hbar\omega_0$ 이며, $\omega\neq\omega_0$이며 $\frac{\mu\varepsilon_0}{\hbar|\omega_0-\omega|}\ll1$ 라고 가정하자. 이 때 ϕ_2에 대한 슈뢰딩거방정식을 다음과 같이 어림으로 표기할 수 있음을 보이라.

즉 $i\hbar\frac{\partial\phi_2}{\partial t}=-\theta(t)\mu\varepsilon_0\cos\ \omega t+\hbar\omega_0\phi_2$.

(다) 이 방정식의 해를 구하라. (Hint: $\phi_2=e^{-i\omega_0 t}\phi$ 놓고 풀것)
특히 $|\omega_0-\omega|\ll\omega_0,\omega$ 라면, 그 ϕ_2의 풀이는? 전자가 바닥상태 및 들뜬상태에 있을 각각의 확률은?

(라) 빛을 정해진 시간 T 동안 만 쏘일 때, T 가 지난 후에 전자가 들뜬상태에 있을 확률은 얼마인가? 이 확률이 $T=\frac{2\pi}{|\omega_0-\omega|}$ 에서 0 임을 보이라. 이 물리적인 의미를 사각파 (square pulse) $E(t)=(\theta(t)-\theta(t-T))\varepsilon_0\cos(\omega t)$ 의 푸리에(Fourier) 전개와 관련해서 설명하라.

3. 질량이 m 이고 상호작용이 없는 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 입자 여러 개가, 각 변의 길이가 L인 정육면체 퍼텐셜 상자에 갇혀 있는 경우를 생각하자. 단 이 퍼텐셜은

$$V(\vec{x})=\begin{cases}0, & \text{내부}\\ \infty, & \text{외부}\end{cases}$$ 이다.

(가) 이 계의 에너지 준위가 x, y, z 방향의 양자 번호 n_x, n_y, n_z로 표현하라. 단 $n_x, n_y, n_z = 1, 2, \cdots$ 이다.

(나) 많은 전자가 이 에너지 준위를 밑에서부터 채워 올 때, 그 바닥 상태를 생각하자. 에너지가 E 와 E+dE 사이에 있을 전자의 수를 dN 이라고 하면, 전자의 스핀을 고려할 때,

$$dN=\sqrt{2m}\frac{m L^3}{\hbar^3 \pi^2}\sqrt{E}dE$$

가 됨을 보여라.

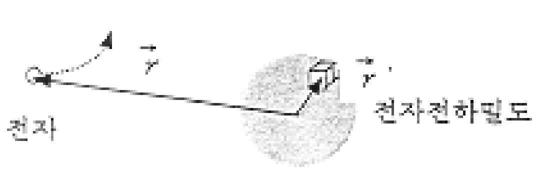
(다) N 개의 전자가 바닥상태를 이룰 때, 그 전자들 중에서 가장 큰 에너지를 Fermi 에너지 E_F 라고 하면,

$$N=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2m E_F}{\hbar^2 \pi^2}\right]^{3/2} L^3$$

됨을 보이라.

(라) 전자의 전체 에너지를 가), 나), 다)부터 구하고, 또한 전자의 평균에너지를 구하라.

4. 낮은 에너지로 입사하는 전자가 그림과 같이 분포한 전자밀도와 충돌 실험에 의하여 전자 밀도의 전하 분포를 알고자 한다. 비상대론적 슈뢰딩거 방정식을 사용하여 실험 결과를 분석하고자 한다. ($|Q|$ 는 전하밀도 전체의 전하량) . 반대칭화를 고려하지 않아도 된다.



(가) 전자의 전하 분포를 $-eQ\rho(\vec{r}')$ 이라 하고, 입사하는 전자의 위치를 $\vec{r}$ 이라 하며, 입사하는 전자는 점 입자로 간주할 때, 전자의 운동에 대한 슈뢰딩거 방정식을 쓰고, 특히 전자 전하밀도에 대한 포텐셜을 명기하라. 이 포텐셜의 푸리에 변환이

$$\tilde{V}_{\vec{q}}=\frac{4\pi Q e^2}{q^2}\int d^3x\ e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\rho(\vec{x})=\frac{4\pi e^2}{q^2}\ \tilde{\rho}_{\vec{q}}$$

임을 보여라.

만일 전하밀도를 점 입자 전자라면 $\tilde{V}_{\vec{q}}$는 어떻게 되는가?

(나) 전하밀도가 점 입자 전자인 경우 Born 근사에 의하여 탄성충돌 면적을 $(d\sigma/d\Omega)_0$ 라고 하면, 전하 분포가 있는 경우 전자의 충돌면적 $(d\sigma/d\Omega)$가 Born 근사를 사용하여

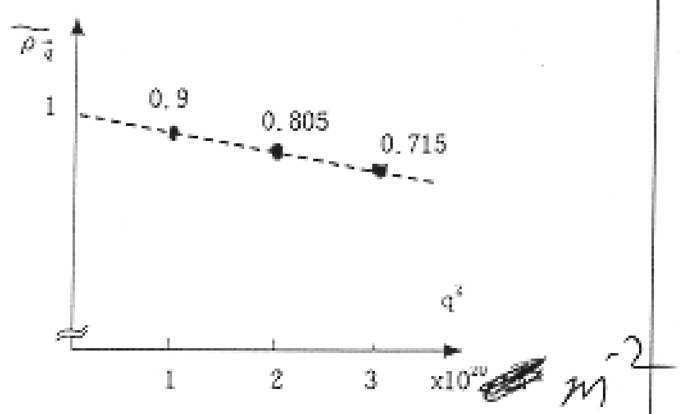
$$(d\sigma/d\Omega)=(d\sigma/d\Omega)_0\ |\tilde{\rho}_{\vec{q}}|^2$$

임을 보여라. 여기서 $\hbar\vec{q}$ 는 전자의 충돌 전후의 운동량 차이이다.

(다) 충돌되는 전자의 전하 분포가 구형대칭이라고 가정하면, $\tilde{\rho}_{\vec{q}}$ 가 q^2의 함수인 것을 보이고, 전자의 전하분포의 r.m.s. 반경

$$r_{r.m.s.}\equiv\left[\int d^3\vec{r}\ r^2\rho(r)\right]^{1/2}$$

을 아래 실험 결과로부터 구하라. (Hint: q^2이 적은 극한에서 $\tilde{\rho}_{\vec{q}}$ 를 고찰할 것)



2001학년도 제1학기 대학원 논문제출 자격시험 문제지

과 목 : 통계역학 (석사과정)

2001 . 01. 13.

1. 부피 V에 N개의 이상 기체가 있다. 이 경우 기체의 크기는 무시하고 기체 사이의 상호 작용이나 위치에너지는 0이고, 오직 운동에너지만을 갖는다.

(가) 이 이상 기체들의 고전적 분배함수를 구하라.

(나) 이 분배함수로부터 이상기체 방정식을 구하라.

(다) 이 기체 사이에 상호작용이 있는 경우 그 포텐셜은 $u(r)=u(|\vec{\gamma_i}-\vec{\gamma_j}|)$로 표시되고, 이를 에너지 등분배와 비리알(virial) 정리를 사용하면

$$PV=Nk_BT[1-\frac{2\pi n}{3k_BT}\int_0^\infty \frac{\partial u(r)}{\partial r} f(r)\ r^3 dr]$$

이 된다.

이때, f(r)은 거리에 따른 상호간 분포함수 (pair distribution function)로 거리가 무한대로 가면 f(r)은 1로 접근한다. 또 n은 평균 기체 밀도이다. 밀도가 낮은 기체의 경우 그 상호간 분포 함수가

$f(r)\simeq\exp[-u(r)/k_BT]$로 근사될 때 기체방정식이

$\frac{PV}{Nk_BT}\simeq 1-2\pi n\int_0^\infty [f(r)-1]r^2dr$ 임을 보이라.

(라) 만약 이 기체가 반경이 σ 인 단단한 공(hard sphere)이라면 이 이상기체 방정식은 어떻게 변화하는가?

단단한 공이란 기체 사이의 상호작용이

$$u(r)\begin{pmatrix} =\infty & \text{for} & r\le\sigma \\ =0 & \text{for} & r>\sigma \end{pmatrix}$$ 인 경우이다.

2. 스핀이 1/2이며, 상호 작용하는 세 개의 스핀 계에 z-방향으로 자기장 H를 걸었을 때, 계의 해밀토니안은

$$\mathcal{H}=-2J(\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}+\vec{S_2}\cdot\vec{S_3}+\vec{S_3}\cdot\vec{S_1})-H(S_1^z+S_2^z+S_3^z)$$

로 주어진다. 단 J>0, $\hbar=1$로 놓는다.

(가) 계의 해밀토니안을 계의 총 스핀 S^{tot}과 그것의 z-성분 $S_z^{tot}=S_1^z+S_2^z+S_3^z$을 사용하여 나타내어라.

(나) 분배함수는 $Z=\sum_{(m)}\ g(S^{tot})\ \exp[-\beta\mathcal{H}\ ]$으로 구해지며, 여기서 $g(S^{tot})$는 주어진 S^{tot}이 만들어지는 방법의 수이다. 세 개의 스핀 계에서는 g(3/2)=1, g(1/2)=2인데 그 이유를 설명하라.

(다) 양자 상태 {m}은 스핀 상태 (S^{tot}, S_z^{tot})로 결정된다. 분배함수를 계산하여 보여라.

(라) H=0 일 때, 기저상태의 총 에너지 값 E_0를 직관적으로 쓰고, 그것이 옳은지를 계산으로 보여라.

Hint: H=0에서의 분배함수

$Z=4\exp[-3\beta J/2]+4\exp[+3\beta J/2]$임.

(마) H=0에서 이 계의 엔트로피를 얻어 보이고, T→ ∞일 때와 T=0 일 때의 값들을 구하고 그렇게 되는 이유를 써라.