1. 지구 주위를 돌고 있는 인공위성의 운동을 생각하자. 지구와 인공위성의 질량은 각각 M과 m이며, 중력상수는 G이다.

(가) 이 운동은 평면에서 일어남을 보이고, 지구를 원점으로 한 극좌표계 (r, θ)에서 인공위성의 운동 방정식을 구하라. (지구의 운동은 무시하라.)

참고: 극좌표계에서 가속도는 $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$ 로 쓸 수 있다.

(나) 위 운동방정식은 적절한 유효퍼텐셜 안에서 일어나는 지름 $(\hat{\mathbf{r}})$ 방향의 일차원 운동으로 기술 할 수 있다. 각운동량을 l 이라고 할 때, 유효퍼텐셜 $V_{eff}(r)$을 구하라.

(다) 인공위성의 궤도가 원(circle)이 되는 경우에 에너지 E와 궤도 반지름 r_0 사이의 관계를 구하라.

(라) 원운동을 하는 인공위성이 공기에 의하여 속력 v에 비례하는 저항력 $F_f = -av$ 를 받는다고 하자. 이 경우에 에너지가 감소하여 원운동의 반지름이 시간에 따라 작아지게 되는데 그 변화율이

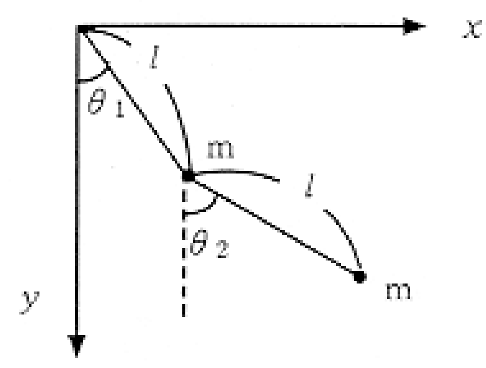
$$\frac{dr_0}{dt} = -\frac{2ar_0}{m}$$

로 주어짐을 보여라. (인공위성의 궤도는 원을 유지한다고 가정하라.)

2. 질량 m인 두 질점이 다음 그림과 같이 길이 l인 두 개의 줄에 연결되어 진자 운동을 한다.

(가) 이 계의 라그랑지안(Lagrangian)을 써라.

(나) 운동의 너비가 작은 경우에 $(|\theta_1|, |\theta_2| \ll 1)$, θ_1과 θ_2의 2차 항까지 포함해서 라그랑지안의 어림식을 쓰고, 이로부터 두 질점의 운동방정식을 세워라.

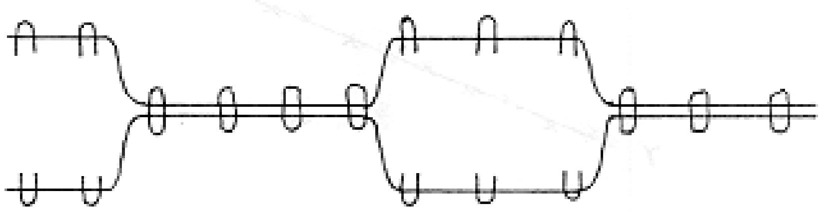


(다) 정상모드(normal mode)의 고유진동수와 고유 벡터를 구하라.

(라) $t = 0$ 에서의 초기 조건이 $\theta_1 = \theta_0$와 $\theta_2 = 0$ 및 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ 으로 주어졌을 때, 시각 t 에서의 각위치 $\theta_1(t)$와 $\theta_2(t)$를 구하라.

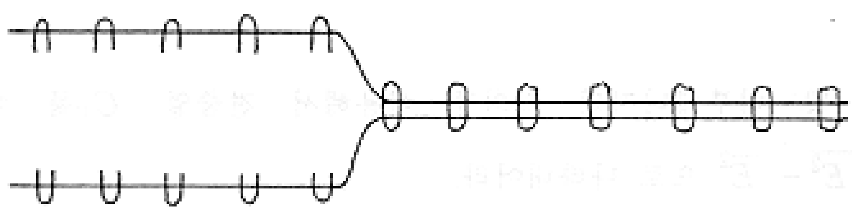
1. N 개의 고리(link)로 구성되어 있는 지퍼(zipper)를 생각하자. 각 고리는 에너지 0인 닫힌 상태와 에너지 $\varepsilon\ (>0)$인 열린 상태로 있을 수 있으며, 주위는 온도 T인 열저장체(heat reservoir)로 볼 수 있다고 하자. 볼츠만 상수는 k 라 하고 다음에 답하라.

(가) 앞 고리의 상태와 관계없이 뒤의 고리가 열릴 수 있는 경우에 계의 고리 당 헬름홀츠 자유에너지(Helmholtz free energy per link)가 $f = -kT\ln(1+e^{-\varepsilon/kT})$ 로 주어짐을 보여라.



(나) 열려진 고리의 평균 개수 $\bar{n}$ 를 구하라.

(다) 위와 달리 지퍼의 고리들은 앞의 것이 열려야 뒤의 것이 차례로 열리게 된다고 하자. 곧 i 번째 고리가 열린 경우에만 i+1 번째의 고리가 열릴 수 있다.

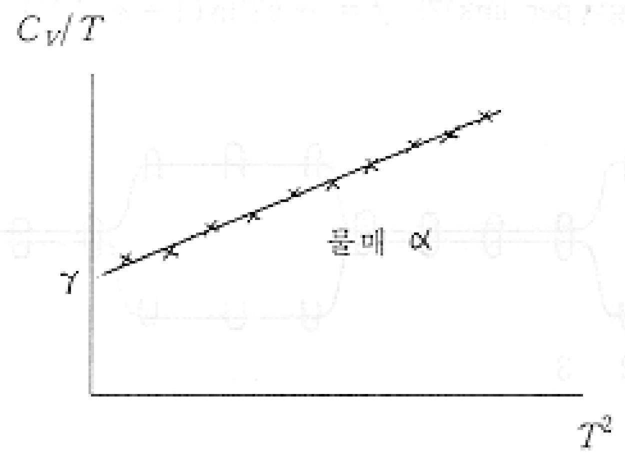


이 경우 분배함수(partition function)가 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$Z = \frac{1-e^{-(N+1)\varepsilon/kT}}{1-e^{-\varepsilon/kT}}$$

(라) (다)의 경우에 열려진 고리의 평균 개수 $\bar{n}$ 를 구하고 (나)의 결과와 비교하여 그 차이를 논의하라. 계산의 편의를 위해 고리 수가 충분히 많은 경우 ($N \gg 1$)만 고려하라.

2. 부피를 일정하게 유지하면서 금속의 견줌열(specific heat) C_V 를 측정하면 온도 T 가 낮을 때 다음 그림과 같은 결과를 얻는다. 곧 C_V/T 를 T^2 에 대해 그리면 대체로 절편(intercept) γ, 물매(slope) α 인 직선이 얻어진다.



(가) 이 결과에 의하면 금속의 견줌열에는 두 가지 요소 A와 B가 기여한다고 볼 수 있다. 이 두 요소가 온도의 변화에 따라 금속의 내부에너지 $\overline{E}$에 기여하는 형태, 곧 $\overline{E} = E_A + E_B$ 로 쓸 때 $E_A \propto T^x$ 및 $E_B \propto T^y$ 에서 x 와 y를 구하고 $(x < y)$, 두 요소 A와 B의 물리적 근원을 설명하라.

(나) 분배함수 및 내부에너지의 정의를 이용해서 견줌열 C_V를 에너지 요동(fluctuations) $\overline{(\varDelta E)^2} \equiv \overline{E^2} - \overline{E}^2$ 으로 나타내어라.

(다) 온도가 충분히 높을 때 금속에서 에너지의 제곱평균제곱근 요동(rms fluctuations) $\sqrt{\overline{(\varDelta E)^2}}$ 은 온도에 어떻게 의존하는가?

1. WKB 어림법에 의하면 두 위치 x 와 x_0 에서의 파동함수는 서로 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\psi(x) \approx \psi(x_0) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^{x} dx' p(x') \right]$$

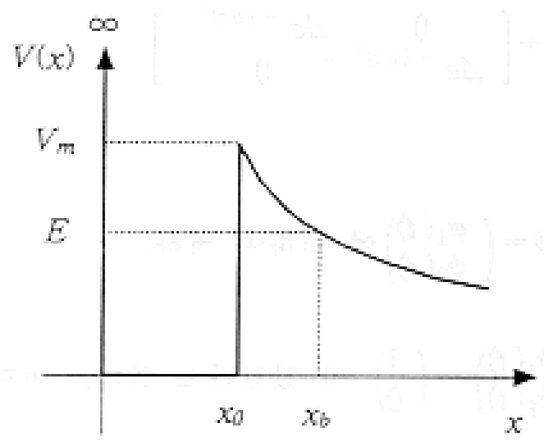
여기서 $p(x)$는 위치 x 에서의 고전적 운동량이다.

(가) 그림 A와 같이 일반적인 일차원 퍼텐셜 우물 $V(x)$ 안에 에너지 E (>0)인 입자가 가둬져 있다. 우물 바깥벽 x_b 에서의 파동함수는 $\psi(x_b) \approx \psi(x_0) e^{-\gamma/2}$ 와 같이 쓸 수 있음을 보이고, 상수 γ 에 대한 표현식을 구하라.

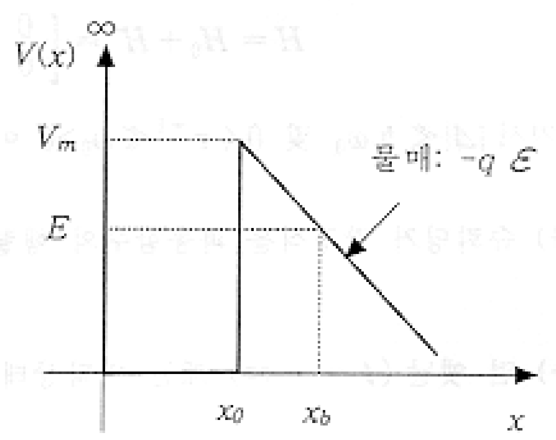
(나) 고전역학적 논의를 통하여 이 입자의 우물 안에서의 속도 v 및 운동의 진동수 f 를 구하고 갇힌 상태의 수명(lifetime) τ 를 추정하여라.

(다) 퍼텐셜 우물의 모양이 그림 B와 같이 물매(slope)가 일정하게 선형적으로 주어진 경우에 γ 를 구하라.

참고: $\int dx \sqrt{a+bx} = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$



<그림 A>



<그림 B>

2. 스핀 1/2인 입자가 균일한 자기마당 $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ 에서 정지해 있다고 하자. 이 입자의 자기회전비율(gyromagnetic ratio)을 g라고 하면 해밀토니안은 $H = -g\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ 로 주어진다. 파울리 행렬(Pauli matrices)은 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$임을 이용해서 다음 물음에 답하라.

(가) 이 계의 해밀토니안을 2×2 행렬로 나타내고 가능한 고유 에너지(eigenenergy)와 고유 상태벡터(eigenstate vector)를 구하라.

(나) 초기시간 ($t=0$)에서의 상태벡터가 $\psi(t=0)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)\\ \sin(\alpha/2)\end{pmatrix}$로 주어진 경우에 임의의 시간 t 에서의 상태벡터를 구하고 스핀의 기대값 $\langle \mathrm{S} \rangle$을 시간의 함수로 구하라. 여기서 α의 물리적 의미는 무엇인가?

(다) 이 입자에 공간적으로 불균일하고 세기가 충분히 약한 자기마당 성분이 더해져서 자기마당이 $\mathrm{B}=(\mathrm{B}_0+\gamma z)\hat{z}$ 의 형태로 주어진다 하자. 이러한 상황에서 입자가 받는 힘의 세기와 방향을 구하라.

(라) 초기 상태벡터가 (나)와 같이 주어지고 (다)에서와 같은 자기마당이 시간 $0 \le t \le T$ 동안만 작용하는 경우에 시간 $t \ge T$ 에서 상태벡터를 구하라. 이로부터 스핀의 z 성분이 위 방향인 입자가 가지게 되는 운동량의 z 성분의 크기를 구하라.

3. 두 에너지 준위(energy level)를 가진 계에 진동수가 매우 낮아서 껴울림(resonance)에서 완전히 벗어난 작은 건드림(perturbation)을 일정 시간 주는 문제를 다루기 위해서 다음과 같은 해밀토니안을 생각하자.

$$H=H_0+H'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \hbar\omega_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \Delta e^{-(t/\tau)^2}\\ \Delta e^{-(t/\tau)^2} & 0\end{bmatrix}$$

여기서 $|\Delta| \ll \hbar\omega_0$ 및 $0<\tau^{-1} \ll \omega_0>0$ 이다.

(가) 슈뢰딩거 방정식을 파동함수의 행렬 표현 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}$에 대하여 써라.

(나) 먼 옛날 ($t=-\infty$) 계는 바닥상태 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ 에 있었다고 하자. 바닥상태에 있을 확률이 들뜬 상태에 있을 확률보다 언제나 충분히 더 크다고 가정하면 ψ_2에 대한 슈뢰딩거 방정식을 다음 꼴로 어림할 수 있음을 보여라.

$$\frac{d\psi_2}{dt}+i\omega_0\psi_2=\frac{\tau\Delta}{2\sqrt{\pi}i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t-(\omega\tau/2)^2}$$

(다) 항등식 $\dfrac{d\psi_2}{dt}+i\omega_0\psi_2=e^{-i\omega_0 t}\dfrac{d}{dt}(e^{i\omega_0 t}\psi_2)$를 이용해서 위 식의 풀이를 다음과 같이 쓸 수 있음을 보여라.

$$\psi_2=\frac{\tau\Delta}{2\sqrt{\pi}i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{-i\omega t-(\omega\tau/2)^2}}{i(\omega_0-\omega)}$$

(라) 주어진 가정을 이용하여 (다)의 식을 더 간단하게 해서 들뜬 상태의 확률너비가 $\psi_2 \approx -\dfrac{\Delta}{\hbar\omega_0}e^{-(t/\tau)^2}$로 주어짐을 보이고 이 풀이의 물리적 의미를 간단히 기술하라.

4. 충분히 낮은 에너지를 가진 질량 M의 입자가 반지름 R, 깊이 V_0인 퍼텐셜 우물에 의하여 흩뜨려지는 문제를 생각하자. 평면 입사파가 $\Psi_0 = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\theta)$ 와 같이 부분파(partial wave)로 전개될 수 있음을 이용해서 다음 물음에 답하라. 여기서 $j_l(kr)$은 구면 베셀 함수(spherical Bessel function)이고 $P_l(\cos\theta)$는 르장드르 함수(Legendre function)이며, 특히 $j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$ 및 $P_0(\cos\theta) = 1$ 이다.

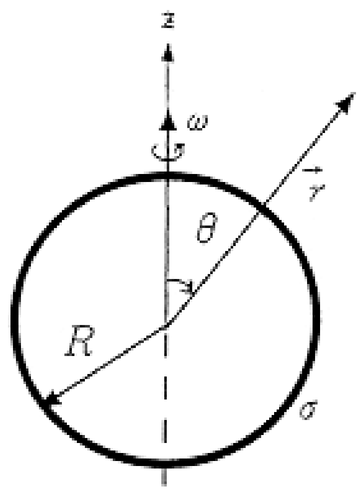
(가) S-파동 어림 (s-wave approximation)에서는 $l = 0$ 성분만을 고려한다. Ψ_0의 S-파 성분을 복소수 형태로 나타내면 $\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}$임을 보이고, 우물 바깥 ($r > R$)에서 흩뜨려진 파동 Ψ_s의 S-파 성분을 $\frac{\eta e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}$라고 놓으면 미분 흩뜨림 자름넓이(differential scattering cross section)는 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\eta - 1|^2}{4k^2}$로 주어짐을 보여라.

(나) 우물 안 ($r < R$)에서는 밖으로 나가는 파동이 없다고 가정하는 "검정체 어림 (blackbody approximation)"에서는 우물 안에서의 파동함수를 $\Psi_< = C\frac{e^{-iKr}}{Kr}$로 쓸 수 있다. 이 식에서 K를 k와 M 및 V_0로 나타내어라. 이러한 경우에 $u \equiv r\Psi$ 에 대한 경계조건과 입사에너지가 매우 작다는 조건으로부터 $\eta \approx e^{-2ikR}$ 을 얻어내고, 이로부터 미분 흩뜨림 자름넓이와 온흩뜨림 자름넓이(total scattering cross section)가 각각 R^2 와 $4\pi R^2$ 임을 보여라.

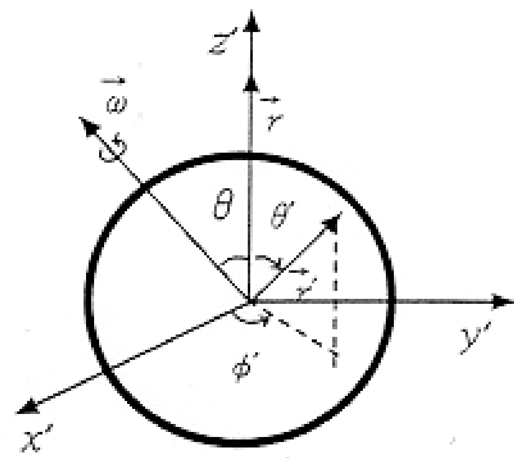
(다) 스핀이 1/2인 두 개의 중성자가 가질 수 있는 전체 스핀값은 0과 1이다. 이 두 가지 경우에 대하여 각각 전체 스핀 상태벡터를 각 중성자의 스핀 상태벡터들로 나타내고, 순열 대칭성(permutation symmetry)을 고려하면 공간 파동함수가 두 중성자의 맞바꿈(exchange)에 대하여 어떤 성질을 지녀야 하는지 논의하라.

(라) 스핀이 1/2인 두 개의 중성자의 흩뜨림을 질량중심계에서 고려하자. S-파 어림과 검정체 어림에서 (다)의 결과를 이용하여 온흩뜨림 자름넓이를 전체 스핀이 0인 경우와 1인 경우로 나누어서 구하라.

1. 반지름이 R이고 표면에 면전하밀도(surface charge density) σ로 전하가 분포되어 있는 도체 공이 그림 A와 같이 각속도 $\omega = \omega\hat{z}$ 로 돌고 있다.



[그림 A]



[그림 B]

(가) 공 표면의 한 점 $\mathbf{r}'$ 에서 흐르는 전류면밀도(surface current density) $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$를 각속도 ω와 위치벡터 $\mathbf{r}'$으로 나타내고 임의의 지점 $\mathbf{r}$ 에서의 자기벡터퍼텐셜(magnetic vector potential) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$을 적분 형태로 표시하여라.

(나) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$을 실제로 계산하려면 그림 B와 같이 $\mathbf{r}$ 방향을 z'축으로 택하고 ω를 $x'z'$ 평면에 있도록 좌표계 (x', y', z')을 정하는 것이 편리하다. 이렇게 정한 좌표계에서 전류면밀도 $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$을 구하라.

(다) 위에서 얻어진 적분을 계산하여 공의 외부 지점에서 벡터퍼텐셜 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$이 다음과 같이 주어짐을 보여라.

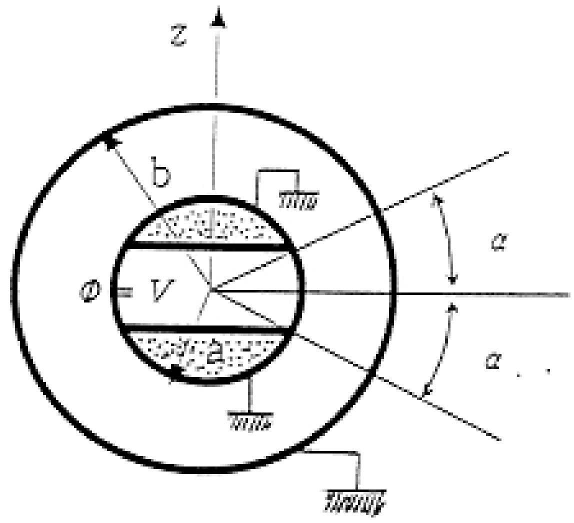
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R^4}{3} \frac{\omega \times \mathbf{r}}{r^3}$$

참고: $\int dx \frac{x}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{4}{3b^2}\left(a+\frac{b}{2}x\right)\sqrt{a-bx}$

(라) 공 외부의 지점을 그림 A의 좌표계를 써서 $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$로 나타낼 때 위의 결과로부터 자기마당(magnetic field) $\mathbf{B}(r, \theta, \phi)$ 를 구하라.

참고: $$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(A_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

2. 반지름이 b인 도체 공껍질 속에 반지름이 a인 도체 공이 중심이 같도록 놓여 있는데, 안쪽의 공은 그림과 같이 위 부분과 아래 부분을 남기고 가운데 부분은 껍질만 남기고 속을 파내었다. 잘려진 안쪽 공의 가운데 껍질 부분은 전기퍼텐셜이 V이고, 나머지 도체 부분들은 모두 접지되어 있다. (따라서 퍼텐셜이 걸린 도체 부분과 접지 된 도체 부분은 그 사이에 아주 얇은 절연체로 분리되어 있다.)



(가) 안쪽 공과 바깥쪽 공껍질 사이에서 ($a \leq r \leq b$) 전기마당선(electric field line)을 대략 그려라. 또한 공껍질 바깥 영역에서 ($r > b$) 전기퍼텐셜을 구하라.

(나) 라플라스 방정식(Laplace equation) $\nabla^2 \Phi = 0$ 의 풀이는 다음과 같이 주어진다

$$\Phi = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)$$

여기서 l 이 홀수인 항들은 0이 됨을 보여라.

(다) (나)로부터 $r = a$ 및 $r = b$ 에서 경계조건을 만족하는 풀이가 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$\Phi = V \sum_{l=\text{even}} \frac{P_{l+1}(\sin\alpha) - P_{l-1}(\sin\alpha)}{[(a/b)^l - (b/a)^{l+1}]} \left[\left(\frac{r}{b}\right)^l - \left(\frac{b}{r}\right)^{l+1} \right] P_l(\cos\theta)$$

(라) 바깥쪽 공껍질 표면에서 미소 넓이 Δs에 작용하는 힘의 크기를 구하라.

참고: 르장드르 함수(Legendre function) $P_l(x)$는 다음 관계식들을 만족한다.

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$$

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} = (2l+1) P_l(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{mn}$$

3. 전기마당 E와 자기마당 B의 전자기파가 유전율 ε, 자화율 μ, 전기전도도 σ 인 매질에서 진행할 때 다음 물음에 답하라.

(가) 이 경우에 만족되는 막스웰 방정식(Maxwell's equations)을 써라.

(나) 이 매질에서 전자기파가 평면파 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ 및 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$의 형태로 진행한다고 하자. E와 B가 만족하는 파동방정식은 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$\left(-k^2+\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-i\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=0$$

(다) 질량 m, 전하량 e인 전자의 개수밀도(단위부피 당 개수)가 N인 영역에서 각진동수 ω인 전자기파에 대한 전기전도도는 $\sigma = i(Ne^2/m\omega)$로 주어진다. 이 전자기파의 전파속도와 관련된 파동수(wave number) k와 굴절률 n을 구하라. (계산을 간단하게 하기 위해서 $\mu = \varepsilon = 1$ 로 가정하라.)

(라) 대기 상층부에서 라디오파(radio wave)가 반사되는 것은 위에서 구한 파동의 전파속도와 관련되어 있다. 이와 같이 매질에 전자기파가 지나갈 때 각진동수 ω에 따라 전파되는 상황을 위의 결과를 사용하여 기술하라.