[역학 문제1]

질량이 $\sqrt{2}$g 인 입자가 8×10^5 m/s 로 움직이다가 동일한 질량을 갖는 정지한 입자와 탄성 충돌을 하였다.

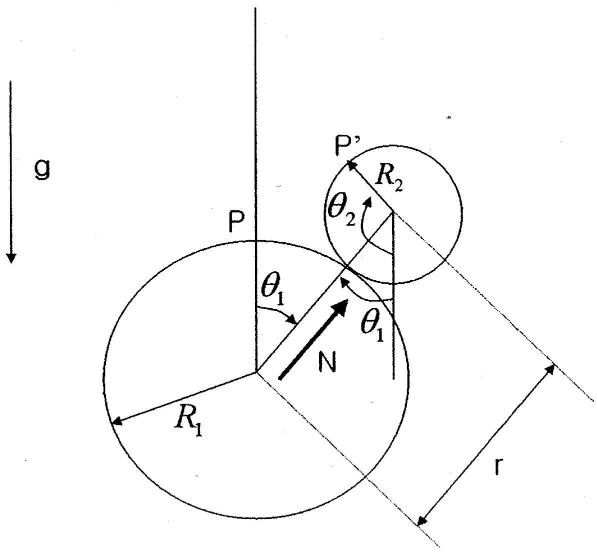
(가) 이 중 한 입자가 초기에 입사된 입자의 진행 방향에 대해 각 60° 방향에서 발견되었다고 했을 때, 나머지 한 입자의 진행 방향과 충돌 후 속력을 구하여라.

(나) 위 (가)번 문제의 두 입자가 충돌 후 진행하는 방향과 속력을 질량 중심 좌표계에서 구하라.

(다) 초기에 정지했던 입자의 질량이 1g 이라고 하자. 정지 좌표계에서 보았을 때, 움직이던 입자가 충돌 후 초기에 입사된 입자의 진행 방향에 대해 각 Θ 만큼 방향을 바꾸어 진행한다면 $\sin^2\Theta$이 가질 수 있는 최대 값은 얼마인지 구하라.

[역학 문제2]

그림과 같이 반경 R_2, 질량 m의 균일한 원통이 반경이 R_1인 고정된 다른 원통 위에 초기에 정지해 있다가 원통의 면을 따라 미끄럼 없이 굴러 내려가는 경우를 생각하자. 움직이는 원통의 질량 중심의 위치를 나타내기 위해 극좌표 (r_1, θ_1)를 사용하고, 수직선에 대해 그 원통이 자신의 축에 대한 회전 각도를 기술하기 위해 각 θ_2를 사용하자. 두 원통의 중심 사이의 거리를 r이라 할 때 다음 질문에 답하라. (단, 초기 상태에 아래 그림의 점 P와 P'은 같은 위치에 있으며, 두 원통의 축은 항상 평행하다.)



(가) 두 원통이 서로 접촉한 상태에서 미끄럼 없이 굴러가는 운동을 기술하기 위해서는 구속 조건(constraint)이 몇 개 있어야 하는가? 또, 그 구속 조건을 구하라.

(나) 굴러가는 원통의 운동 에너지와 위치 에너지를 구하고 라그랑지안(Lagrangian)을 구하라. (원통의 관성 능률도 계산하여 구하라.)

(다) 위 (가)의 조건을 만족하는 라그랑지 운동 방정식을 라그랑지 곱수 (Lagrange multiplier)를 이용하여 적어라. 이 때 사용되는 라그랑지 곱수의 물리적 의미를 간단히 설명하라.

(라) 수직 항력 N을 θ_1으로 나타내라. 구르는 원통이 고정된 원통에서 떨어지기 시작할 때의 각도 θ_1의 값은 얼마인가?

[양자 문제1]

1차원 물리계에서 무한대의 퍼텐셜 우물 (infinite potential well) 내에 $V(x) = \frac{\hbar^2}{m} V_0 \delta(x)$ 로 주어지는 퍼텐셜을 생각하자. [즉, $V(|x| < a) = \frac{\hbar^2}{m} V_0 \delta(x)$; $V(|x| > a) = \infty$]

(가) 파동함수 $\psi(x)$가 $x=0$에서 만족하는 $\frac{d\psi}{dx}$의 경계조건을 구하라.

(나) 짝-홀짝성(even parity)을 갖는 고유함수 $\psi_n(x)$를 쓰고, 그 에너지 고유값 E_n이 만족하는 조건식을 k_n의 함수로 구하라. (단, $k_n = \sqrt{2mE_n/\hbar^2}$ 이다.)

(다) 위의 (나)에 대하여 $V_0 = 0$ 과 $V_0 = \infty$인 경우 각각 에너지 고유값 E_n을 구하고 바닥상태(ground state)의 파동함수를 그려라.

(라) 홀-홀짝성(odd parity)를 갖는 고유함수 $\psi_n(x)$를 쓰고, 그 에너지 고유값이 V_0에 관계없음을 보여라.

[양자 문제2]

3차원 조화진동(어울림 떨개, harmonic oscillator) 퍼텐셜 $V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2$ (여기서 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 임)의 영향 아래 질량 m, 전하 q, 그리고 스핀 0인 입자가 있다고 하자.

(가) 가능한 에너지 고유값과 각 에너지 준위의 겹침(degeneracy)수를 말하라.

(나) 균일한 전기장 $\vec{E} = E\hat{z}$ 가 추가로 걸린 경우, 바닥상태(ground state)에서 에너지 값과 고유함수는 어떻게 주어지는가?

[참고로 퍼텐셜이 $V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$으로 주어지는 1차원 조화진동자의 바닥상태 고유함수는 $\phi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi x_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$ 이다. $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$.

(다) 이 계에 전기장을 없애는 대신에 균일한 자기장 $\vec{B} = B_0\hat{z}$ 를 걸었다. 이때 $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$ 의 관계를 이용하여 해밀토니안(Hamiltonian)이 다음과 같음을 보이라.

$$H_2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 z^2 - \frac{q}{|q|}\omega_L L_z$$

위의 H_2에서 ω를 ω_0와 ω_L의 함수로 구하라. 단, w_L은 라모아(Larmor) 진동수 $\omega_L = \frac{|q|B_0}{2mc}$ 이다.

(라) 위 (다)번 문제의 L_z는 $L_Z = \hbar(a_L^\dagger a_L - a_R^\dagger a_R)$로 주어진다. 이로부터 바닥상태(ground state)의 $\langle L_z \rangle$와 바닥상태의 에너지를 구하라. [여기서

$a_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y)$, $a_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y)$, $a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{a_\omega} + i\frac{a_\omega}{\hbar}p_x\right)$,

$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y}{a_\omega} + i\frac{a_\omega}{\hbar}p_y\right)$, $a_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 이다.]

[양자 문제3]

스핀 $\frac{1}{2}$인 전자들로 구성된 물리계에서 스핀 연산자를 $\vec{s}$ 로 표시하기로 한다.

(가) 2 개의 전자로 구성된 계에서 $\vec{t_1} = \vec{s_1} + \vec{s_3}$ 이라 할 때 (편의상 두 번째 전자를 $\vec{s_2}$ 가 아니고 $\vec{s_3}$ 로 부르기로함.) $\langle (\vec{t_1})^2 \rangle$의 최대값과 최소값을 구하라.

(나) $\vec{t_1} = \vec{s_1} + \vec{s_3}$. $\vec{t_2} = \vec{s_2} + \vec{s_4}$ 라고 할 때, $\langle (\vec{t_1} + \vec{t_2})^2 \rangle$의 최대값과 최소값을 구하라.

(다) 이제 4개의 전자로 이루어진 계의 Hamitonian이 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$H = J\,(\vec{s_1}\cdot\vec{s_2} + \vec{s_2}\cdot\vec{s_3} + \vec{s_3}\cdot\vec{s_4} + \vec{s_4}\cdot\vec{s_1}) \quad (\text{단 } J > 0)$$

편의상 H를 $\vec{t_1}$ 과 $\vec{t_2}$ 를 이용해 표현하면, $H = \frac{1}{2}J\,[(\vec{t_1} + \vec{t_2})^2 - (\vec{t_1})^2 - (\vec{t_2})^2]$ 으로 된다. 위의 (가)와 (나) 문항의 결과를 이용해 바닥상태 (ground state) 에너지 E_0 를 구하라.

(라) 위 (다)의 바닥상태(ground state)의 고유벡터 $|\psi\rangle$를 구하여라. 단 2개의 스핀에 대한 Clebsch-Gordan 계수 $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle$은

$$\langle \tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} | 1, 0 \rangle = \langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2} | 1, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{. 그리고}$$

$$\langle 1, +1; 1, -1 | 0, 0 \rangle = \langle 1, -1; 1, +1 | 0, 0 \rangle = -\langle 1, 0; 1, 0 | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 이다.}$$

최종 결과를 4 개의 전자들의 상태 $|m_1, m_2, m_3, m_4\rangle$의 일차 결합으로 표시하여라. 또는 그 결과를 그림 (즉, $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$등)으로 표시해도 좋다.

[양자 문제4]

3차원에서의 질량 m인 입자의 해밀토니안(Hamiltonian)은 다음과 같다. $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$. 퍼텐셜 에너지는 $V(r) = -\frac{e^2}{r}\exp(-\lambda r)$ 로 정의된다. 바닥상태에 대한 시행 파동함수 (trial wavefunction)를 $\psi(r) = N\exp(-br)$으로 잡았다.

(가) 규격화 상수(Normalization constant) N 을 구하라.

(나) 에너지 기대값 $E = \langle H \rangle$를 b의 함수로 구하라.

(다) $\lambda = 0$의 경우에 변분 방법(variational method)을 적용하여 에너지를 최소화하는 b를 구하라.

(라) $\lambda \neq 0$의 경우에 위의 입자가 평면파(plane wave)로 운동량 $\vec{p} = \hbar\vec{k} = \hbar k\hat{z}$을 가지고 입사 되었을 경우에, 보른 근사(Born approximation)를 사용하여 미분자름넓이 (differential cross section) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$을 구하라. [참고로 여기에서 Ω는 산란(scattering)의 결과로 나오는 입자의 입체각(solid angle)에 해당된다.]

[유용한 적분식: $\int_0^\infty dx\ \exp(-ax)\ \sin(bx) = \frac{b}{a^2+b^2}$]

※ 유용한 공식 (전자기학)

1. (r,ϕ,z) cylindrical 좌표계에서의 유용한 공식:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right)$$

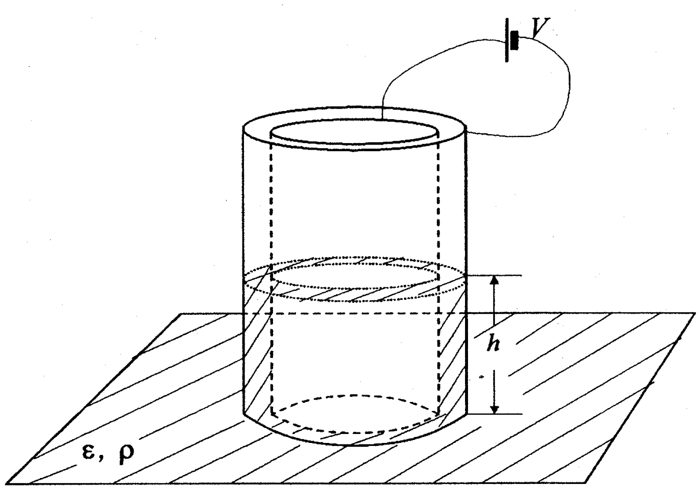
2. Bessel 함수 $J_\nu(x)$는 다음과 같은 미분방정식을 만족하고,

$$\frac{d^2J_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\nu}{dx} + \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu = 0$$

$J_{\nu=0}(x)$해에 대해 x_{0n}는 $J_0(x_{0n})=0$을 만족시키는 n번째 값이다. $(n=1,2,3,\ldots)$

[전자기 문제1]

아래 그림과 같이, 반지름이 각각 R과 $R+d$인 두 개의 원형 도체 관(conducting cylindrical shell)을 생각하자.



두 관의 길이는 $L(\gg R)$로 같으며, 각 관의 두께는 무시할 수 있을 정도로 얇다. 두 관의 축이 일치하도록 배치하고, 유전율이 $\epsilon\,(>\epsilon_o)$이며 질량밀도가 ρ인 액체에 두 관을 약간 잠기도록 수직으로 집어넣었다. [액체의 양은 매우 많아서, 액체를 조금 덜어내거나 보태어도 수면 높이의 변화는 없으며, 표면장력은 무시할 수 있다.]

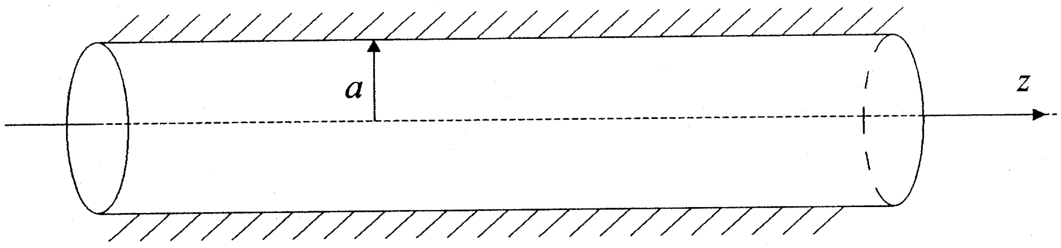
안쪽 도체와 바깥쪽 도체 사이에 전압차 V 를 걸었을 때, 관 사이의 액체 면이 관 바깥의 수면보다 $h(>0)$만큼 올라왔다고 하자.

(가) 안쪽 도체 관과 바깥쪽 도체 관 사이의 전기장을 구하라.

(나) 정전기에너지 (electrostatic energy) 식 $U(h)=\frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}d^3\vec{r}$ 를 이용하여, 관 사이의 액체에 작용하는 전기적인 힘을 구하라.

(다) 평형 상태가 이루어졌을 때, 관 사이 액체면의 높이를 구하라.

[전자기 문제2]
아래 그림과 같이, 내부 반지름이 a인 원통형 도파관(waveguide)을 생각하자.



내부는 진공이고 도파관의 전기전도도는 무한히 크다고 하자. 또한, 도파관의 길이가 z축으로 무한히 길 때, 주파수 $f = \dfrac{w}{2\pi}$ 이며

$$\vec{E} = (E_r\hat{r} + E_z\hat{z})e^{i(kz-wt)}$$

$$\vec{B} = B_\phi\hat{\phi}e^{i(kz-wt)}$$

로 표시되는 TM (transverse magnetic) 전자기파가 도파관 내부에 입력되었다고 가정하자.

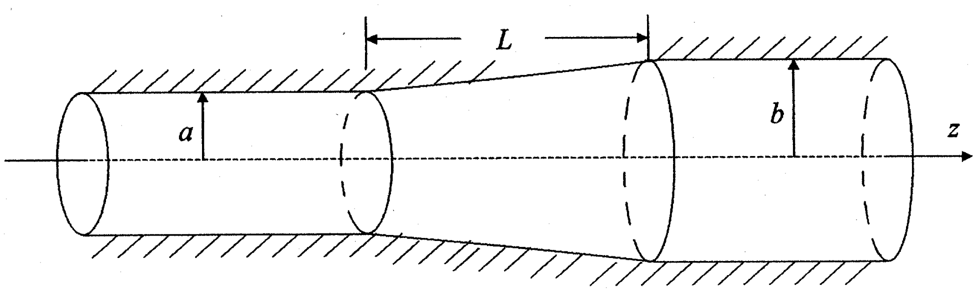
(가) 도파관 내부에서의 Maxwell 방정식을 써라.

(나) 위의 전자기파가 다음과 같은 미분 방정식을 만족함을 보여라.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}E_z\right) - k^2E_z + \frac{w^2}{c^2}E_z = 0 \quad (\text{단, } c = \text{ 빛의 속도})$$

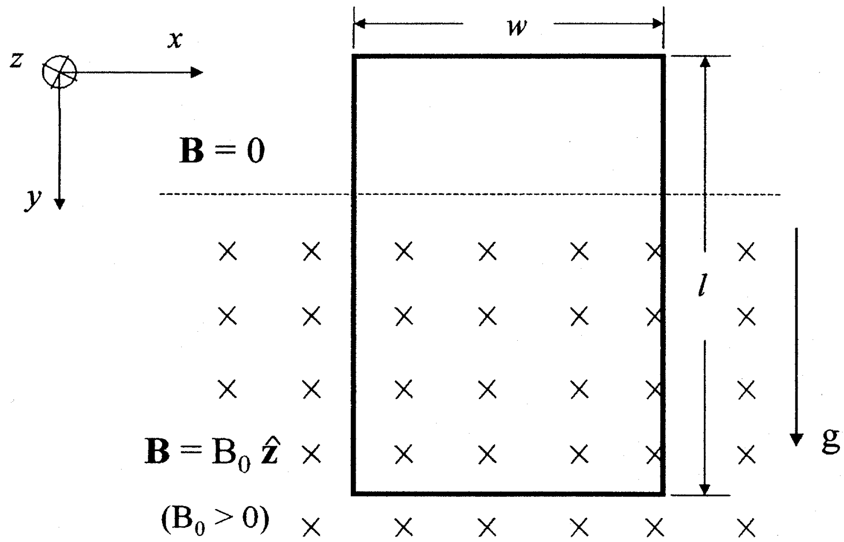
(다) 경계조건으로부터, 전자기파의 분산식 (dispersion relation)과 군속도 (group velocity)를 구하라.

(라) 도파관의 반지름이 점진적으로 a에서 b로 L만큼의 길이동안 증가하였고 ($b > a$), 그 후에는 같은 반지름으로 유지되었다 (아래 그림 참조). 이러한 경계에서의 전자기파의 반사가 무시할 수 있을 정도로 작다고 할 때, 단위 시간당 전달되는 전자기파 에너지 크기의 변화, 그리고 전기장 진폭 (amplitude)의 변화를 기술하라.



[전자기 문제3]

길이 l이고 폭이 w인 직사각형의 전선을 생각하자. 이 전선의 저항은 R, 자체 인덕턴스는 L, 그리고 질량은 m이다. 아래 그림과 같이, 이 직사각형의 전선을 자기장이 존재하는 영역으로 떨어뜨린다고 하자. [직사각형의 면은 항상 z 방향에 수직이며, 위아래 두 변은 항상 x 방향을 향한다.] $t=0$에서 전선의 하단이 $B \neq 0$인 영역에 들어오며, 이 문제에서는 전선의 상단이 $B=0$인 영역에 있는 시간에서의 운동만을 다루도록 하자.



(가) 도선 내에 유도된 기전력의 크기와 방향을 구하라.

(나) Kirchhoff 법칙으로부터, 도선에 흐르는 전류 I의 시간의 변화량 ($\frac{dI}{dt}$)을 도선이 움직이는 속도 v의 함수로 표시하라. 또한, 뉴튼 법칙을 적용하여 $\frac{dv}{dt}$를 I의 함수로 구하라.

(다) L은 무시할 수 있을 만큼 작고 R을 무시할 수 없는 경우, I와 v의 시간의존성을 구하라.

(라) R은 무시할 수 있을 만큼 작고 L을 무시할 수 없는 경우, I와 v의 시간의존성을 구하라.

[통계 문제1]

N 개의 동일한 페르미온 입자들이 1차원 조화진동자 (어울림떨개; harmonic oscillator) 퍼텐셜 $V(x)=\frac{1}{2}mw_o^2x^2$ 안에 갇혀 있는 계를 생각하자. (단, 이 페르미온 입자는 서로 상호작용을 하지 않음을 가정하고, 상태 수(number of states)의 계산에서 스핀의 겹침(degeneracy)은 무시한다.)

(가) 이 페르미온 계가 $T=0$ 의 바닥 상태(ground state)에 있을 때, 가장 높은 에너지 상태에 있는 입자의 에너지는 $\epsilon_F=\alpha\hbar w_o$, 그리고 전체 에너지는 $E_0=\beta\hbar w_o$로 쓸 수 있다. 여기서 α와 β 를 구하라.

(나) 이 페르미온 계의 들뜸 상태는 전체 에너지 $E_m=E_0+m\hbar w_o$로 표시할 수 있다. $\Delta E_m=m\hbar w_o$의 들뜸 상태에 대한 상태 수(number of states)를 $\Omega(m)$이라 할 때, $m=1,2,3$에 대한 상태 수 $\Omega(m=1),\Omega(m=2),\Omega(m=3)$를 구하라.

(다) m이 큰 수일 때, (즉, $m\gg 1$) $\Omega(m)$은 다음과 같이 근사된다고 한다.

$$\Omega(m)\approx\frac{e^{\pi\sqrt{2m/3}}}{4\sqrt{3}m}$$

이 식을 이용하여, $E=E_m$에 대한 이 계의 엔트로피 $S(E_m)$를 계산하고 온도 T 와 m의 관계가

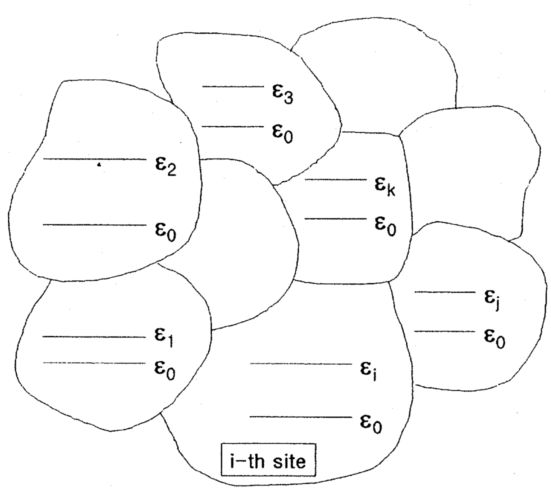
$$m=A\left(\frac{k_BT}{\hbar w_o}\right)^2$$

로 근사될 수 있음을 보이고, 그 계수 A를 구하라.

(라) 위 문항 (다)의 결과를 이용하여, 이 계의 엔트로피 $S(T)\approx BT$, 그리고 열용량 (열들이; heat capacity) $c_v(T)\approx BT$ 로 근사됨을 보이고, 그 계수 B를 구하라.

[통계 문제2]

유리(glass) 상을 갖는 물질의 열용량(열들이; heat capacity)은 흔히 온도 T에 비례한다고 한다. 이를 설명하기 위해 물질 내부는 N개의 서로 독립적인 지점(site)으로 이루어져 있고, 모든 지점(site)은 오직 두 가지 상태만 가질 수 있다고 가정하자. (여기서, i-번째 지점의 바닥상태는 ϵ_0이고 들뜸상태는 ϵ_i이라 한다.) 단, 문제의 편의를 위해 모든 지점의 바닥상태 에너지는 $\epsilon_0 = 0$으로 정하고, 들뜸상태 에너지 ϵ_i는 $(i = 1, 2, \ldots, N)$ 마구잡이(random)로 분포되어 있다고 하자.



(가) i-번째 지점(site)의 분배 함수 (single-site partition function) z_i를 구하라.

(나) 각 지점(site)의 들뜸 에너지 ϵ_i의 분포가 상태 밀도(density-of-states) $n(\epsilon)$로 주어진다고 할 때, (다시 말해서, 부피 V인 계의 들뜸 에너지가 ϵ에서 $\epsilon + d\epsilon$ 범위에 있는 지점(site)의 수를 $Vn(\epsilon)d\epsilon$로 가정할 때), 전체 계의 자유 에너지 F 가

$$F = V\int d\epsilon\, n(\epsilon) f(\epsilon)$$

로 표현할 수 있음을 보이고, $f(\epsilon)$를 구하라.

(다) 이 계의 내부 에너지 E를 구하라.

(라) 상태 밀도 $n(\epsilon)$가 $n(\epsilon) \sim \epsilon^p$ 로 가정할 때, $c_v \sim T$ 라는 사실로부터 $n(\epsilon)$의 ϵ의 의존성을 구하라.