

소속대학원		학 번		성 명		감독교수 확인	(인)
-------	--	-----	--	-----	--	---------	-----

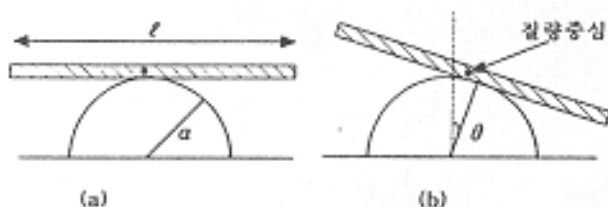
2000학년도 대학원 자격시험1 문제지

과목명 : (역학 및 전자기)

2000 . 01. 22시행

역학 1. (총 15점)

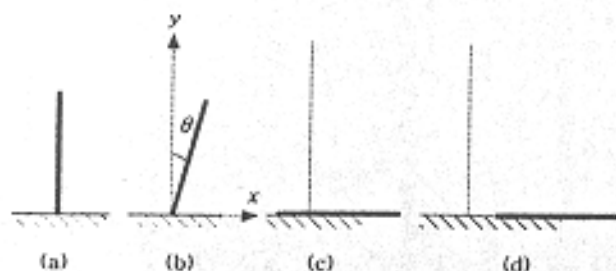
그림 (a)와 같이 바닥에 고정된 반원통(반경 a) 위에 폭 d , 길이 ℓ , 질량 m 인 판자가 수평하게 놓여있다. 이 때 판자의 한쪽 끝을 살짝 누르면 판자는 상하로 진동하게 된다. 판자의 두께는 무시하고 미끄러지지 않는다고 가정할 때 다음 물음에 답하시오.



- (가). 그림 (a)의 경우에 원통축과 평행한 접축축에 대한 판자의 관성모멘트 I 를 구하시오. (3점)
- (나). 그림 (b)처럼 원통축의 중심축을 중심으로 하는 원통과표계를 이용하여 일반화된 좌표 θ 를 택할 때 판자의 운동에너지 T 와 위치에너지 V 를 구하시오. (힌트: 판자의 질량중심 운동과 그에 대한 판자의 상대적인 운동으로 나누어 생각하시오). (5점)
- (다). 라그랑지안 $\mathcal{L}$ 을 구하고 이로부터 운동방정식을 구하시오. (5점)
- (라). 판자가 아주 작게 미소 진동하는 경우 진동수를 구하시오. (2점)

역학 2. (총 15점)

아래 그림 (a)와 같이 연필이 수직으로 서 있다가 그림 (b)에서와 같이 쓰러질 때 매끈한 면에서는 그림 (c)와 같이, 거친 면에서는 그림 (d)와 같이 쓰러진다. 연필을 질량 m , 길이 L 인 균질의 가느다란 막대로 간주하고 접점과 바닥면 사이의 최대정지마찰계수를 μ_s 라 하자.



- (가). 연필이 그림 (b)와 같이 각 θ 로 기울었을 때의 각속도와 각가속도를 θ 의 함수로 구하시오. (3점)
- (힌트: 막대의 한쪽 끝에 대한 관성모멘트는

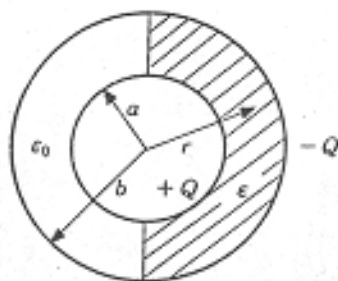
$$I = mL^2/3 \text{ 이고, 질량 중심의 위치는 } x = \frac{L}{2} \sin \theta,$$

$$y = \frac{L}{2} \cos \theta \text{ 로 주어진다.)}$$

- (나). 그림 (b)의 상태에서 바닥면이 연필에 작용하는 힘의 x -성분 F_x 와 y -성분 F_y 를 각각 구하시오. (4점)
- (다). $\tau(\theta) = \frac{F_x}{F_y}$ 의 그래프를 정성적으로 그리시오. (2점)
- (라). μ_s 의 값에 따라 그림(c)와 그림(d)에서 일어나는 현상을 (다)의 그래프를 이용하여 설명하시오. (4점)
- (마). 그림 (d)와 같이 쓰러지기 위한 μ_s 의 최소값을 구하시오. (2점)

전자기 1. (총 20점)

그림과 같이 반경 a, b ($a < b$)인 두 개의 동심형 구껍질 모양의 도체구에 전하를 각각 $+Q, -Q$ 를 대전시켰다. 두 도체구 사이의 반쪽에는 유전율 ϵ 인 유전체가 차있고 나머지 반쪽은 비어있을 때 다음 물음에 답하시오.



- (가). 두 도체구 사이의 전기장을 구하시오. (7점)
- (나). 안쪽 도체구 표면($r=a$)에서의 전하밀도 분포를 구하시오. (7점)
- (다). 안쪽 도체구 표면에 유도 편극된 전하밀도를 구하시오. (6점)

소속대학원		학 번		성 명		감독교수 확인	(인)
-------	--	-----	--	-----	--	---------	-----

2000학년도 대학원 자격시험 1 문제지

과목명 : (역학 및 전자기)

2000 . 01. 22시행

전자기 2. (총 20점)

그림과 같이 완전 절연체로 만들어진 탄성계수 k_s , 평형 상태의 길이 a 인 이상적인 스프링이 z 축을 따라 놓여있다. $t=0$ 시간에 질량 m 전하 $+q$, 질량 m 전하 $-q$ 인 두 개의 입자를 스프링의 양쪽 끝 (스프링 길이는 a)에 정지 상태로 매달아 놓았다. 중력에 의한 효과를 무시할 때 다음 물음에 답하시오.



(가). $k_s a \gg q^2/a^2$, 즉 $\epsilon = (q^2/k_s a^2) \ll 1$ 인 조건을

가정할 때, 두 전하 사이의 거리 $z(t)$ 가

$$z(t) = a + d_0(\cos \omega t - 1)$$

이 됨을 보이고 d_0 와 ω 를 q , a , k_s , m 의 함수로 ϵ 의 1차항까지 구하시오. (6점)

(나). 전하의 단전자 운동에 의해 생긴 쌍극자 모멘트

$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 e^{-i\omega t}$ 가 만들어 내는 복사 벡터 퍼텐셜

(radiation vector potential) $\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 는

$$\vec{A}(\vec{x}) = -ik \vec{p}_1 \frac{e^{i\omega r}}{r}$$

로 기술할 수 있다. 이 단전자에 의해 방출되는 평균 총 복사 일률(total radiation power) P 를 구하시오. (7점)

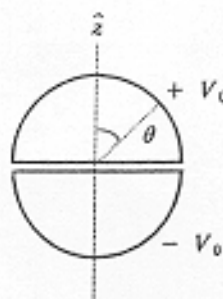
(힌트: $k = \omega/c$ 이고 $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}[\dot{\vec{r}}^2 \hat{n} \cdot \vec{E} \times \vec{B}^*]$

는 time-averaged radiated power per unit solid angle이다.)

(다). 이상적인 스프링을 가정할 때, 쌍극자의 진동 에너지의 손실은 복사(radiation)에 의해 생기고 결국 단전자의 운동은 $z(t) = (a - d_0) + d(t)\cos \omega t$ 에서 t 가 증가함에 따라 $d(t) \rightarrow 0$ 이 될 것으로 예상된다. 에너지 보존 법칙을 고려하여 $d(t) = d_0 \exp(-t/\tau)$ 이 됨을 보이고, τ 를 ω 의 함수로 구하시오. (7점)

전자기 3. (총 20점)

그림과 같이 반경 R 인 두 개의 반구형 도체의 퍼텐셜이 $+V_0$, $-V_0$ 로 유지되어 있다. 두 반구 사이의 간격(gap)은 절연체로 채워져 있고 그 간격은 무시할 만큼 작다고 할 때 다음 물음에 답하시오.



(가). 도체 밖에서의 퍼텐셜 $\phi(\vec{r})$ 은 구 좌표계를 쓰면

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

로 쓸 수 있음을 보이시오. 여기서 z 축은 그림과 같이 잡았고, $P_l(\cos \theta)$ 는 르장드르 다항식(Legendre polynomial)이며 l 은 홀수 정수이다. 그리고 이 때

$$B_l = R^{l+1} (2l+1) V_0 \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

로 주어짐을 보이시오 (l = 홀수). (5점)

(힌트: $\int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \delta_{lm} \frac{2}{2l+1}$ 과

$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ 을 이용하시오.)

(나). 이 계의 쌍극자 모멘트(dipole moment)를 구하시오. (6점)

(다). 도체 내부의 퍼텐셜을 구하시오. (3점)

(라). 상하 반구 도체의 표면이 각각 양전하와 음전하로 대전되어 위와 같은 퍼텐셜이 만들어진다고 할 때, 면전하밀도 σ 를 θ 의 함수로 구하시오. (6점)

소속대학원	학번	성명	감독교수 확인	(인)
-------	----	----	---------	-----

2000학년도 대학원 자격시험 1 문제지

과목명 : (양자 및 열통계)

2000 . 01. 22시행

양자 1. (총 20점)

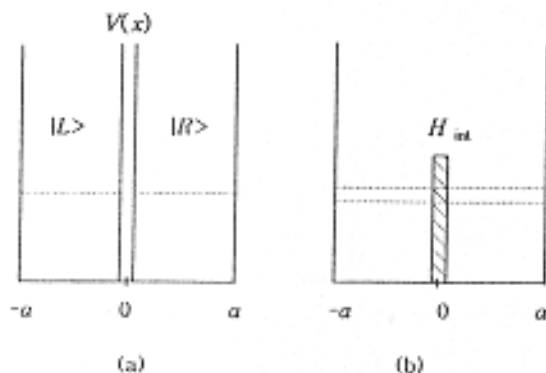
질량 m 인 입자가 다음과 같은 무한히 높은 일차원 우물에 갇혀 있다. 다음 물문에 답하시오.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (\text{이외 영역}) \end{cases}$$

- (가). 이 입자가 우물의 기저상태에 있을 때 입자의 파동함수 및 에너지 값을 구하시오. (4점)
- (나). (가)의 경우 입자의 위치 및 운동량을 재었을 때 각각의 기대값을 구하시오. (4점)
- (다). (가)의 경우에서 어느 순간 갑자기 오른쪽 벽을 a 에서 $2a$ 로 옮겨 우물을 두 배로 넓히고 곧 입자의 에너지를 측정하였다 (벽을 움직이는 과정에서 파동함수가 변하지 않았다고 하자). 이 때 얻을 수 있는 최빈값(most probable value)과 그 결과를 얻을 확률을 구하시오. (8점)
- (라). (다)의 경우 에너지 기대값(expectation value)을 구하시오. (4점)

양자 2. (총 20점)

그림 (a)와 같이 무한히 높은 일차원 우물에 갇힌 한 입자를 생각하자.



이 때 입자는 오른쪽, 왼쪽 영역에서 각각 다음과 같은 슈뢰딩거 방정식을 만족한다고 하자 (두 장벽 사이는 매우 얇다고 가정함).

$$H_0' |L\rangle = E_0' |L\rangle, \quad H_0' |R\rangle = E_0' |R\rangle$$

여기서 $H_0' = H_0 + V(x)$ 이고 H_0 는 운동에너지이다. 만일 중앙 퍼텐셜 벽을 낮추어 그림 (b)와 같이 되었을 때 좌측(우측)의 입자는 우측(좌측)으로 이동이 가능하다. 이 경우 다음의 해밀토니언으로 기술된다.

$$H = H_0 + H_{int}$$

- (가). 퍼텐셜이 $x=0$ 주위로 대칭인 경우 홀짝성(parity) 연산자 P 에 대해서 $[H, P] = 0$ 임을 설명하시오. (4점)

- (나). P 의 고유상태를 $|s\rangle, |a\rangle$ 라 할 때 $\langle dH/da \rangle = 0$ 임을 보이시오. (4점)

(힌트: 연산자 P 는 다음 식을 만족함.

$$P|L\rangle = |R\rangle, \quad P|R\rangle = |L\rangle, \\ P|s\rangle = |s\rangle, \quad P|a\rangle = -|a\rangle.)$$

- (다). $\langle L|H|L\rangle = \langle R|H|R\rangle = E_0$, $\langle L|H|R\rangle = \langle R|H|L\rangle = \Delta E$ 라면 $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ 에서 H 의 고유치들을 구하시오. (4점)

- (라). 만일 시간 $t=0$ 에서 $|\psi(0)\rangle = |L\rangle$ 상태에 있었다면,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} \left[\cos\left(\frac{\Delta E t}{\hbar}\right) |L\rangle - i \sin\left(\frac{\Delta E t}{\hbar}\right) |R\rangle \right]$$

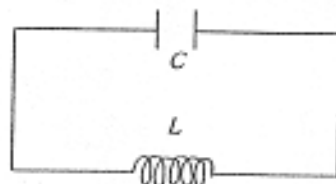
가 됨을 보이시오. (6점)

- (마). 시간 t 가 지난 후 다시 $|\psi(t)\rangle$ 가 $|L\rangle$ 인 상태로 돌아오는데 필요한 최소 시간을 구하시오. (2점)

양자 3. (총 20점)

다음과 같은 고전적 LC 회로를 양자역학적으로 기술하고자 한다. 순간 축전기 전하량을 $Q(t)$, 순간 교류전류를

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad \text{라고 할 때 다음 물문에 답하시오.}$$



- (가). 이 계의 라그랑지안 $\mathcal{L}$ 및 해밀토니안 H 를 구하시오. (4점)

(힌트: $Q(t)$ 를 기본 동역학 변수로 하고 이에 대응되는 막론을 켈레 운동량(canonical conjugate momentum) $P(t)$ 를 정의하여 구하시오.)

- (나). 연산자 a, a' 를 다음과 같이 정의하고

$$a = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} Q + i\sqrt{\frac{1}{2L\omega\hbar}} P,$$

$$a' = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} Q - i\sqrt{\frac{1}{2L\omega\hbar}} P,$$

양자와 조건 $[Q, P] = i\hbar$ 를 가정할 때, $[a, a']$ 를 계산하고 H 를 a, a' 를 사용하여 나타내시오. (4점)

단, 여기서 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 임.

소속대학원	학 번	성 명	감독교수 확인	(인)
-------	-----	-----	---------	-----

2000학년도 대학원 자격시험 1 문제지

과목명 : (양자 및 열통계)

2000 . 01. 22시행

(다). $[H, a]$ 를 계산하고, 여기서 얻어지는 연산자 a 의 성질을 이용하여 기저상태의 함수 $\psi_0(Q)$ 와 기저 상태의 에너지 E_0 를 구하시오. (6점)

(라). 회로 내에 저항 R 을 직렬로 연결했을 때 이 저항에 의한 섭동(perturbation)을 다음과 같이 쓸 수 있다고 하자.

$$H_{int} = -\frac{1}{4} \frac{R}{L} (Q, P),$$

R 의 값을 작다고 가정할 때 기저상태 에너지의 일차섭동(1st order perturbation) 및 이차섭동(2nd order perturbation)의 양을 각각 계산하시오. (6점)

(참고: $\{, \}$ 는 anti-commutator를 나타냄).

열통계 1. (총 15점)

물리계 A 의 절대온도가 T , 엔트로피가 S_A , 에너지가 U_A 이다. 이 계의 헬름홀츠(Helmholtz) 자유에너지(이하 '자유에너지'로 약칭) F_A 는 $F_A = U_A - TS_A$ 로 정의된다.

(가). 물리계 A 의 주위를 둘러싼 열저장체(thermal reservoir) B 의 온도도 T 이다. 시간이 지남에 따라 물리계 A 와 B 사이에 서서히 에너지 교환이 이루어져 A 의 에너지가 ΔU 만큼 변화하였할 때, A 의 자유에너지는 오직 감소하게됨을 보이시오. (5점)

(힌트: 열역학 제1법칙과 제2법칙을 아울러 쓰시오.)

(나). A 가 얼음이고 B 는 물이라고 하자. 주어진 온도 T 에서 얼음이 녹게될 조건을 물과 얼음 사이의 단위 질량당 에너지 차이 $\Delta U^m (= U_{\text{물}}^m - U_{\text{얼}}^m)$ 및 엔트로피 차이 $\Delta S^m (= S_{\text{물}}^m - S_{\text{얼}}^m)$ 의 관계식으로 표시하시오. (여기서 첫 첨자 m 은 단위질량당을 나타냄.) (5점)

(다). 온도 T 인 물리계 A 가 온도 T , 인 태양으로부터 복사에너지 ΔU 를 흡수할 경우 얻을 수 있는 자유에너지 ΔF_A 는 다음의 부등식을 만족함을 보이시오. (5점)

$$\Delta F_A \leq \Delta U(1 - T/T_s)$$

열통계 2. (총 15점)

자유전자들로 이루어진 계에서 전자의 스핀에 의한 상자성 감수율(paramagnetic susceptibility)을 충분히 낮은 온도에서 양자통계적 방법으로 고찰해 보기로 하자. 이 때 전자하나에 대한 해밀토니안은

$$h = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

이다. 여기서 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$, $\vec{\sigma}$ 는 파울리 스핀행렬, 그리고 $\vec{B} = B\hat{z}$ 는 외부자장을 나타낸다.

(가). $T=0K$ 에서 화학퍼텐셜(chemical potential)이 ϵ_F 로 주어지 있다고 하자. N_+ (σ_z 성분이 +1인 상태의 평균 전자수) 및 N_- (σ_z 성분이 -1인 상태의 평균 전자수)를 V (부피), ϵ_F 및 B 를 써서 나타내시오. (6점)

(나). (가)의 결과를 이용하여 $kT \ll \epsilon_F^0$ (여기서 ϵ_F^0 는 $B=0$ 일 때의 화학퍼텐셜임)일 때 전자 스핀에 의한 상자성 감수율 χ 를 $B=0$ 에서 구하시오. 단, 답을 V , ϵ_F^0 및 N 으로 표시할 것. 여기서 $N (= N_+ + N_-)$ 는 전자의 총 개수이다. (6점)

(힌트: M 이 총 자기 모멘트(total magnetic

moment)라면 χ 는 $\chi = \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial B} \Big|_{B=0}$ 으로 주어진다.)

(다). 자유전자들에 대해서 얻은 (나)의 결과는, 적자에 국한되어 있는 이온 계의 상자성효과(paramagnetic effect)를 (스핀 사이의 상호작용을 무시할 때) 모든 온도에서 잘 기술해주는 큐리(Curie) 법칙, 즉

$$\chi_{\text{Curie}}(T) = \frac{\mu_B^2 N}{kT V}$$

와는 상당히 다르다. 자유전자계의 경우에도 아주 높은 온도, 즉 $kT \gg \epsilon_F$ 에서는 큐리 법칙을 따르며, 단지 낮은 온도에서만 이와 같이 큐리 법칙과 큰 차이를 보이는데 그 이유를 물리적으로 설명하시오. (3점)

(힌트: χ 에 대한 주어진 두 식의 비, 즉 χ/χ_{Curie} 를 구하고 이에 대해 설명하시오.)