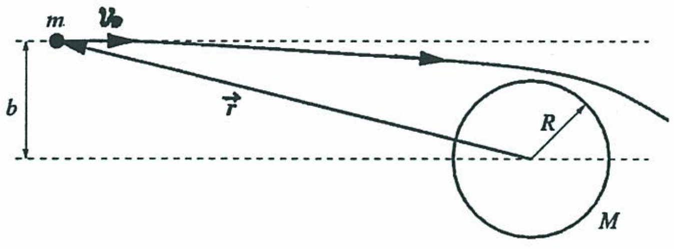
소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 고전역학 **2005. 07. 20 시행**

1\. 질량 m 인 운석이 멀리 떨어져 있는 질량 M, 반경 R 인 구형 행성에 중력 때문에 끌려오게 되는 상황을 생각하자. (※ 운석은 질점인 것처럼 생각하고, 이 과정에서 행성은 주어진 관성계에서 고정되어 있다고 볼 것).



행성

(가) 행성의 질량 중심을 좌표 원점 $(\vec{r}=0)$ 으로 할 때 운석의 위치 $\vec{r}(t)$이 만족하는 운동방정식을 쓰고, 이와 같은 중심력계가 항상 갖는 보존량 (conserved quantity) 들을 말해 보아라.

(나) 위 그림에 주어진 것과 같이 $r(\equiv|\vec{r}|)=\infty$에서 운석이 초기 속력 v_0, 충돌매개변수(impact parameter) b를 갖고 혹성에 접근해 오는 경우 (가) 에서의 보존량들을 v_0 와 b 를 써서 나타내 보아라.

(다) (나)의 경우 운석이 행성에 가장 가까이 도달했을 때의 거리 $r_{\min}$ 을 v_0 와 b 를 써서 나타내어라.

(라) 포획단면적(capture cross section) σ 는 운석이 행성에 부딪치게 되는 경우 (즉 $r_{\min} \le R$ 이 되는 경우)에 대응하는 입사빔 면적(incident beam area)으로 정의할 수 있다. 초기속력이 v_0 일 때, 이 포획단면적 σ 를 구하라.

(마) (라)에서 구한 σ 의 결과가 중력을 "꺼버린" 경우(즉 중력 상수를 0 으로 놓는 상황)에 물리적으로 합당한 답을 주는가? 또 $v_0 \to 0$ 일 때 σ가 보이는 행동(behavior)을 물리적으로 해석해 보아라.

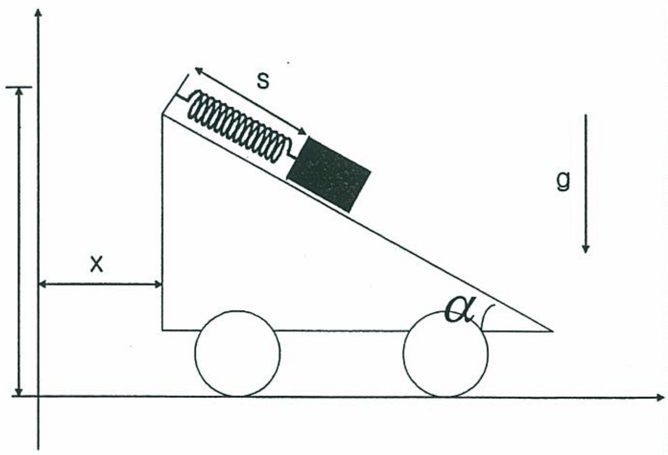
2\. 아래 그림과 같이 수레위의 한쪽 끝에 용수철이 매달려 있고 그 용수철의 다른 끝에는 질량 m인 상자가 매달려 있다. 용수철 상수는 k이고, 용수철이 늘어나지 않은 상태에서의 길이를 ℓ , 늘어난 어떤 상태에서의 길이를 s 라고 표시하자. 바퀴를 제외한 수레의 질량은 M 이고, 각 바퀴의 질량은 M_1, 반지름은 R 이며 수레에는 4 개의 바퀴가 달려있다. 상자와 수레의 빗면 사이에는 마찰이 없다고 가정한다. 이 때 지면 위를 수레가 굴러가는 운동을 생각하자.

(가) 이 계의 라그랑지안을 일반화 좌표 x (그림 참조)와 s를 사용해서 구하라.

(나) 라그랑지안 방정식을 이용하여 상자에 대한 운동방정식, 즉 s 에 대한 방정식을 구하라. 또 그것의 해와 진동수를 구하라.

(다) 수레의 빗면으로부터 질량 m 인 상자에 작용하는 수직 항력의 크기를 구하라.

(라) 수레의 운동, 즉 x 좌표는 시간에 따라 어떻게 변화하는가 말하라.



※바퀴는 균일한 원판으로 생각할 것.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 전자기학 2005. 07. 20 시행

1. 스칼라 포텐셜이 매우 유용한 전기장과는 달리 자기장에 대하여는 벡터 포텐셜을 많이 이용한다. 하지만 경우에 따라서는 자기장의 경우에도 스칼라 포텐셜을 이용하는 것이 더 편리할 때가 있다.

(가) $\vec{x}'$에 있는 작은 전류단위 $Id\vec{l}'$이 좌표 $\vec{x}$인 점 P에 주는 자기장이 다음과 같이 주어짐을 이용하여

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l}' \times \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$$

전류 I가 흐르는 닫힌 loop에 의한 자기장은

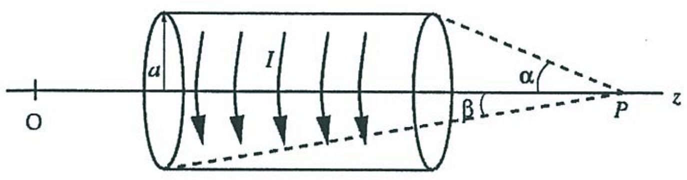
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{\nabla}\Omega$$

로 주어짐을 보여라. 여기서 Ω는 점 P에서 닫힌 loop가 만드는 입체각 (solid angle)을 나타낸다. 풀이과정에서 필요하다면 다음의 벡터 항등식을 이용하여도 좋다.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

(나) 자기장에 대한 스칼라 포텐셜을 $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_m$으로 정의할 때 (가)의 결과로부터 전류 I가 흐르는 닫힌 loop에 의한 Φ_m을 구하라

(다) 이제 다음 그림과 같이 반경 a이며 단위길이당 N번 감긴 솔레노이드에 전류 I가 흐르는 경우를 고려하여 보자. 위에서 구한 결과를 이용하여 솔레노이드 축상의 한점 P에서 솔레노이드에 의한 스칼라 포텐셜 Φ_M을 구하라

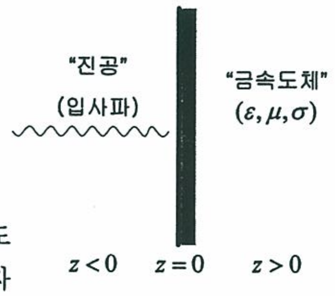


(라) $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_M$을 써서 P점에서 솔레노이드에 의한 자기장을 구하라. 무한 솔레노이드가 되는 조건에서 $\vec{B}$는 어떻게 되는가?

2. 진동수 ω인 전자기파가 진공에서부터 전기전도도가 σ인 금속 도체에 입사하는 경우를 생각하자. 입사파의 진행방향이 그림과 같이 금속표면($z=0$ 평면)에 수직이고 해당 전자기장이

$$\vec{E}_{in} = \hat{x}Ae^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}$$

$$\vec{B}_{in} = \hat{y}Ae^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}$$



(A는 어떤 복소 상수)
와 같이 주어졌을 때, 다음 물음들에 답하라. (※ 금속 도체내에서의 유전상수는 ϵ, 자기투자율은 μ로 놓을 것).

(가) 금속 도체 내에서서의 전자기장을 $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$라고 할 때, 막스웰 방정식으로부터 그것들은 일반적으로

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2\vec{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

와 같은 방정식을 만족함을 보여라. (※ 금속 내에서 전하밀도는 0이라고 생각할 것. 이 경우 막스웰 방정식은 $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}$ 처럼 주어진다.)

(나) 입사파가 위와 같이 주어진 경우 $z<0$인 영역에서 $\vec{E}$와 $\vec{B}$는

$$\vec{E} = \hat{x}Ae^{-i\omega(t-z/c)} + \hat{x}A'e^{-i\omega(t+z/c)}$$
$$c\vec{B} = \hat{y}Ae^{-i\omega(t-z/c)} - \hat{y}A'e^{-i\omega(t+z/c)}$$

와 같이, 그리고 $z>0$(즉 금속 도체 내)인 영역에서는

$$\vec{E} = \hat{x}f(z)e^{-i\omega t}$$
$$c\vec{B} = \hat{y}g(z)e^{-i\omega t}$$

와 같은 형태로 잡아도 좋은 것에 대한 근거를 제시하라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 전자기학 2005. 07. 20 시행

(다) (가)와 (나)에 주어진 정보를 이용할 때, $z>0$에서 $f(z)$, $g(z)$가 만족해야 하는 방정식을 구하고, 특히 그 해를

$$f(z) = Fe^{(i\kappa-\eta)z}$$
$$g(z) = Ge^{(i\kappa-\eta)z}$$

(κ, η 는 양의 상수) 와 같이 나타 낼때 κ와 η는 어떤 값들을 갖는가 말하라. (여기서 $\delta \equiv \eta^{-1}$가 skin depth 또는 penetration depth에 해당한다.)

(라) (다)에서 크기 F및 G사이에는 $G = \dfrac{c(i\kappa-\eta)}{i\omega}F$와 같은 관계가 성립한다. 왜 그런가?

(마) 이제 경계면 ($z=0$)에서의 경계조건을 이용하여 A'/A가

$$\frac{A'}{A} = \frac{1-\dfrac{c(i\kappa-\eta)}{i\omega\mu}}{1+\dfrac{c(i\kappa-\eta)}{i\omega\mu}}$$

와 같이 주어짐을 보여라. (이로부터 반사계수 $R = \left|\dfrac{A'}{A}\right|^2$은 아주 좋은 도체의 경우, 즉 σ가 아주 커서 skin depth δ가 충분히 작을 때에는 $R \simeq 1 - \dfrac{2\omega\mu\delta}{c}$가 되어 좋은 도체는 거울의 역할을 함을 알 수 있다.)

3. 원자속의 전자가 전자기파가 입사했을 때 어떻게 반응하는지 알아보기 위하여 고전적으로 원자내의 전자가 조화운동, 즉

$$m_e[\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x}] = \vec{F}$$

와 같은 운동방적식을 만족한다고 하자. (※ 여기서는 원자 한 개만을 고려하며 그 원자가 원점에 있다고 생각할 것.)

(가) x방향으로 진행하는 평면 전자기파

$$\vec{E}(x,t) = E_0\hat{z}\cos(kx-\omega t)$$
$$c\vec{B}(x,t) = -E_0\hat{y}\cos(kx-\omega t)$$

가 원자에 입사할 때, 원자내 전자의 운동방정식, 즉 위 식의 $\vec{F}$를 구하고 그 운동방정식의 해를 구하라. (※ 이 경우 전자의 x방향 운동은 매우 작아서 근사적으로 $kx \approx 0$이며 자기장에 의한 Lorentz 힘은 전기장에 비하여 $1/c$만큼 작으므로 무시할 것)

(나) 전하가 원점 주위에서 움직이고 있을 때, 그 움직이는 전하에 의하여 발생하는 전자기파는, 전하로부터 상당히 멀리 떨어진 곳에서 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\vec{a}'_\perp}{r}$$
$$c\vec{B} = \hat{r}\times\vec{E}$$

여기서 관측점은 전하로부터 r만큼 떨어져 있으며 $\hat{r}$은 $\vec{r}$방향의 단위벡터, $\vec{a}'_\perp$은 시간 $t' = t - r/c$에서의 전하의 가속도중에서 $\hat{r}$과 수직인 성분을 나타낸다. r이 충분히 크다는 가정하에서 (가)에서 구한 움직이는 전자에 의하여 발생하는 전기장 $\vec{E}(r,t)$를 구좌표 (r,θ,ϕ)를 써서 나타내라.

(다) 원자에서 발생한 전자기파에 의하여 단위시간에 방사되는 총에너지 P_s를 구하라. (※ 충분히 큰 반경 r인 구면을 통하여 단위시간당 방사되는 평균 총에너지를 고려할 것.)

(라) 빛 (특히 태양광)이 공기에 입사할 때를 생각하여 보자. 공기의 경우에는 ω_0가 입사하는 가시광선의 ω보다 훨씬 크다 ($\omega_0 \gg \omega$). 이 경우 (다)에서 구한 P_s의 근사식을 구하고 그 결과로부터 하늘이 왜 푸르게 보이는 지 설명해 보아라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 양자역학 2005. 07. 20 시행

1. 질량 m_1, m_2인 두 개의 spinless 입자가 거리 $|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$에만 의존하는 포텐셜 $V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$의 영향 아래 있을 때, 계의 하밀토니안 연산자는

$$H=\frac{1}{2m_1}\vec{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\vec{p}_2^2+V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$$

와 같은 형태가 된다.

(가) 이 때 상태공간의 기저를 총 선운동량 연산자 $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$와 주어진 하밀토니안 H의 동시고유함수(simultaneous eigenstates)들로 된 상태들로 잡을 수 있는데 그 근거는? (※ 이 사실이 "참"이기 위한 조건을 말하고 $\vec{P}$와 H는 그 조건을 만족함을 보일 것)

(나) H의 고유상태 (그 고유값은 E) 이면서 총 선운동량의 고유값이 $\vec{P}_0$인 상태는

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\vec{P}_0\cdot\left(\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\right)\right]\phi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

와 같은 형태로 나타낼 수 있다. 그 이유를 간략히 말하고 또 이때 $\phi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$이 만족해야 하는 방정식을 구하라.

(다) 만약 포텐셜이 $V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)=\frac{1}{2}k|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2$ (k는 양의 상수)와 같이 주어졌다고 할 때, 총 선운동량의 값이 $\vec{P}_0$로 주어진 상태 중 에너지 E가 가능한 최소값을 가지는 경우에 해당하는 상태함수 $\psi^0_{(\vec{P}_0)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$와 대응하는 에너지 값을 구하라. (※ 여기서 상태함수의 normalization은 생각하지 않아도 좋음).

2. 전하는 갖고 있지 않지만 자기 쌍극자 모먼트가 $\vec{\mu}=\mu_0\vec{S}$ ($\vec{S}$는 스핀 연산자)인 스핀-1/2입자가 x방향으로 균일한 자기장, 즉 $\vec{B}=B_0\hat{x}$ 아래 놓여 있다고 할 때, 다음 물음에 답하라. [참고로 파울리 행렬은 $\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 와 같이 주어진다].

(가) 이 계의 시간 t에서의 스핀 상태를 S_z의 고유 벡터들을 기저로 삼은 열벡터 $\psi(t)=\begin{pmatrix}\alpha(t)\\\beta(t)\end{pmatrix}$로 나타낼 때 $\psi(t)$는 어떤 방정식을 만족하는가?

(나) $t=0$에서 입자가 $S_z=+1/2$인 상태에 있을 때 (즉 $\psi(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$) 시간 $t(>0)$에서의 상태함수 $\psi(t)$를 구하라.

(다) (나)의 경우 시간 t에서 S_y값을 측정한다고 할 때 $S_y=+1/2$ 값이 나올 확률은 얼마인가?

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 양자역학 **2005. 07. 20 시행**

3. 수소 분자의 경우처럼 두 개의 전자가 두 ion들 (위치 $\vec{R}_a, \vec{R}_b$에 고정되어 있다고 생각할 것)에 묶여 있는 계를 생각하자. 이 계의 하밀토니안은

$$H_{tot} = \frac{1}{2m_e}\vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_e}\vec{p}_2^2 - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_a|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_b|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_a|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_b|} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{R}_a - \vec{R}_b|}$$

이다. 여기서 $\vec{p}_1$, $\vec{r}_1$ ($\vec{p}_2$, $\vec{r}_2$)는 전자 1(전자 2)의 운동량과 위치를 나타내고, 두 ion들 사이의 거리 $|\vec{R}_a - \vec{R}_b|$는 충분히 크다고 생각해도 좋다. 이 때 두 전자가 spin triplet에 해당할 때 가능한 가장 낮은 에너지 상태와 spin singlet일 때 가능한 가장 낮은 에너지 상태를 비교할 때 어느 상태의 에너지가 더 낮은 지 근사적으로 알아 보고자 한다.

(가) 위 H_{tot}에 대응하는 (시간에 무관한) 쉬뢰딩거 방정식을 해석적 방법으로 푼다는 것은 불가능하므로 두 전자의 위치 공간에서의 파동함수 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$가 취할 수 있는 상태공간(state space)을 물리적 고려에 따라 적절히 제한시킨 다음 그 제한된 상태공간내에서 H_{tot}의 근사적 고유함수를 찾는 방법을 생각하자. 여기서 $\phi_a(\vec{r})$, $\phi_b(\vec{r})$이 각각 one-particle 하밀토니안 $H_a = \frac{1}{2m_e}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{R}_a|}$, $H_b = \frac{1}{2m_e}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{R}_b|}$의 (에너지가 ε_0인) 바닥 상태에 해당하는 고유함수를 나타낸다고 하면, 위 두 전자계의 상태공간을

방법 A : $\psi_I(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_a(\vec{r}_1)\phi_a(\vec{r}_2)$,
$\psi_{II}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_a(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2)$, $\psi_{III}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_b(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2)$,
$\psi_{IV}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_b(\vec{r}_1)\phi_a(\vec{r}_2)$를 기저로 하는 4차원 상태공간

또는

방법 B : $\psi_{II}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_a(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2)$,
$\psi_{IV}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_b(\vec{r}_1)\phi_a(\vec{r}_2)$ 를 기저로 하는 2차원 상태공간

으로 제한시켜 생각한다고 할 때, 두 방법 A, B는 각각 어떤 물리적 고려에 근거한 것인지 설명하라.

(나) 방법 B에 따라 두 전자의 위치 공간에서의 파동함수를 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = c_1\phi_a(\vec{r}_1)\phi_b(\vec{r}_2) + c_2\phi_b(\vec{r}_1)\phi_a(\vec{r}_2)$ (C_1, C_2는 임의의 복소수이고 $\phi_a(\vec{r})$, $\phi_b(\vec{r})$은 normalized된 것으로 생각할 것) 와 같이 잡고 이 2차원 상태공간에서 H_{tot}의 근사적 고유상태를 찾는 것은 다음과 같은 고유치 문제 (여기서 E가 H_{tot}의 고유값을 나타냄)

$$\begin{pmatrix} V & U \\ U & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (E - 2\varepsilon_0)\begin{pmatrix} 1 & l^2 \\ l^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

를 푸는 것에 해당함을 보여라. 여기서 l, V, U는

$l \equiv \int d^3\vec{r}\phi_a^*(\vec{r})\phi_b(\vec{r})$ (overlap integral이라 불리우며 실수임)

$$V \equiv \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 |\phi_a(\vec{r}_1)|^2 \times \left(\frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{R}_a - \vec{R}_b|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_b|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_a|}\right)|\phi_b(\vec{r}_2)|^2$$

$$U \equiv \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \phi_a^*(\vec{r}_1)\phi_b^*(\vec{r}_2) \times \left(\frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{R}_a - \vec{R}_b|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{R}_b|} - \frac{e^2}{|\vec{r}_2 - \vec{R}_a|}\right) \times \phi_b(\vec{r}_1)\phi_a(\vec{r}_2)$$

와 같이 주어진다.

(다) (나)에 주어진 2차원 고유치 문제를 풀어서 두 전자의 고유상태 (즉 c_1, c_2의 값)와 대응하는 에너지 고유값을 구하라. (에너지 고유값은 ε_0, l, V, U를 써서 나타내고 여기서는 위치 공간에서의 고유함수만 고려할 것)

(라) (다)에서의 결과를 이용하여 이제 두 전자가 spin triplet에 있는 경우와 spin singlet에 있는 경우에 존재하는 에너지 차이를 추정해 보아라.

소속대학원	물리학부	학번		성 명		감독교수 확 인	(인)

물리학부 대학원 자격시험

과목명 : 통계역학 2005 . 07. 20 시행

1 질량 m 인 입자가 1 차원 브라운 운동을 하고 있을 때 그 운동을 다음과 같이 랑제방 방정식으로 기술할 수 있다.

$$m\frac{dv}{dt} = -\zeta v + F(t). \qquad \text{식(1)}$$

여기서 $v(t)$는 입자의 속도, ζ는 마찰계수, 그리고 $F(t)$ 는 외부로부터 받는 힘이다. 이때 힘 $F(t)$는 시간적으로 요동(fluctuation)을 쳐서 앙상불 평균을 생각하면 온도 T 에서 다음과 같은 관계식을 만족시킨다.

$$\overline{F(t)} = 0,\ \overline{F(t)F(t')} = 2\zeta k_B T\delta(t-t'). \qquad \text{식(2)}$$

여기서 k_B 는 볼쯔만 상수이다.

(가) 식 (1)의 일반적인 해를 구하고, 초기 시간을 $t_0 \to -\infty$ 로 잡으면

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)/\tau}F(s)ds \qquad \text{식(3)}$$

가 됨을 보여라. 여기서 $\tau = m/\zeta$ 이다.

(나) 식(2)와 (3)을 이용하여

$$\overline{v(t)} = 0, \quad \overline{v(t)v(t')} = \frac{k_B T}{m}e^{-|t-t'|/\tau} \qquad \text{식(4)}$$

가 됨을 보여라.

(다) 브라운 입자의 확산(diffusion) 현상을 이해하기 위해, 입자 변위의 제곱 평균을 알 필요가 있는데, 그것은

$$\overline{[x(t)-x(0)]^2} = \int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\overline{v(t_1)v(t_2)} \qquad \text{식(5)}$$

처럼 주어진다. 이 식과 식(4)를 이용하여 $t \gg \tau$ 에서

$$\overline{[x(t)-x(0)]^2} \approx 2\frac{k_B T}{\zeta}t$$

됨을 보여라. 이 결과로부터 확산상수 (diffusion constant) $D = k_B T/\zeta$ 이 됨을 알 수 있는데, 이와 관련된 것을 지금으로부터 100년 전 1905년에 아인쉬타인이 처음으로 유도하였다.

2. 질량 m 인 한 종류의 페르미온 입자들로 된 이상기체 (ideal gas) 가 부피 V 를 차지하고 있을 때 총 입자수 N 과 총 에너지 E 는

$$N = g_s\frac{V}{h^3}\int d^3p\frac{1}{z^{-1}e^{\beta e(\vec{p})}+1},$$

$$E = g_s\frac{V}{h^3}\int d^3p\frac{e(\vec{p})}{z^{-1}e^{\beta e(\vec{p})}+1}$$

와 같이 주어진다. 여기서 $e(\vec{p})$ 는 운동량 $\vec{p}$ 인 입자 한 개의 에너지, g_s 는 스핀 겹침수 (spin degeneracy), $\beta = 1/k_B T$, $z = e^{\beta\mu}$ (μ 는 화학적 퍼텐셜)이다. 다음 물음에 답하라.

(가) 비 상대론적 입자이면 $e(\vec{p}) = p^2/2m$ 이다. 이 때 임의의 온도 T 에서 계의 압력 P 와 총 에너지 E 사이에는 $PV = \frac{2}{3}E$ 의 관계식이 성립함을 보여라.

(나) (가)의 경우 절대 영도 (즉 $T=0K$)에서 계의 압력 P 를 구하라. (※ 압력 P 를 밀도 $n \equiv N/V$ 의 함수로 나타낼 것).

(다) 아주 상대론적 (즉 ultra-relativistic) 입자의 경우에는 $e(\vec{p}) = |\vec{p}|c$ 와 같이 잡을 수 있다. 이 경우에도 (가)에서 구한 계의 압력과 총 에너지 사이에 관계식이 변함없이 성립하는가? (그렇지 않으면 올바른 관계식을 구하라).

(라) (다)와 같이 상대론적 입자로 된 계에서 $T=0K$ 에서 압력을 밀도 $n = N/V$ 의 함수로 구하여라.