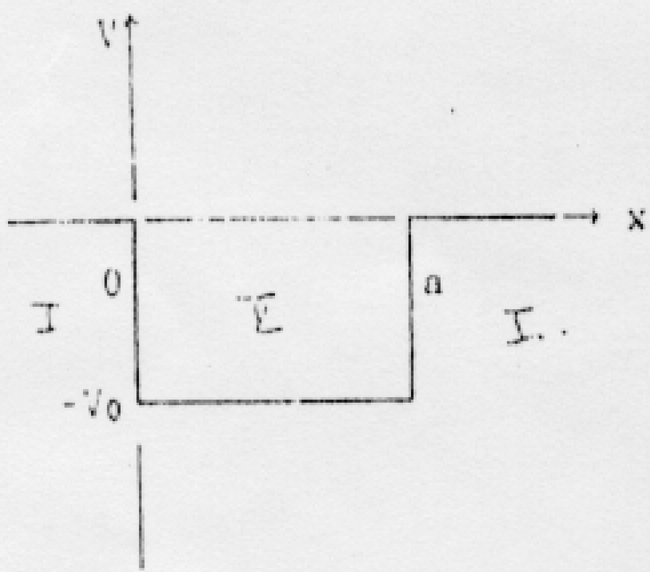
1. 아래와 같은 1차원 포텐셜 우물에서 운동하는 질량 m의 입자를 생각하자.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ -V_0, & 0<x<a \\ 0, & x>a \end{cases}$$



가) 이 계에 합당한 (시간에 무관한) 쉬뢰딩거 방정식을 쓰고 각 경계에서 만족해야 하는 경계조건(boundary conditions)들을 써라.

(나) 위의 쉬뢰딩거 방정식에서 속박상태(bound states)에 해당하는 에너지 고유값을 구하라. (단, 그래프를 그려서 해의 위치를 그래프에 표시하라.)

(다) V_0의 값에 관계없이 속박상태가 적어도 하나는 존재함을 보여라.

(라) 속박상태가 둘 이상 존재하려면 V_0와 a 사이에 어떠한 관계가 성립해야 하는가?

2. 시간에 의존하는 섭동 이론(time-dependent perturbation theory)을 이용하여 수소 원자와 전자기파의 상호작용을 다음과 같이 고려하자.

(가) 해밀토니안이 H_0 이고 그 고유상태와 에너지 고유값들이 $|n\rangle$ 및 E_n 들로 주어진 계를 생각하자. 고유상태 $|\ell\rangle$ 에 있던 이 계에 시간 t=0 때 시간에 의존하는 섭동 $H'(t) = H_1\exp(i\omega t) + H_1^{+}\exp(-i\omega t)$가 주어져서 t>0 에서 총 해밀토니안이 $H = H_0 + H'(t)$로 되었다고 하자. 이 경우에 계의 상태는

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_n C_n(t)\exp(-iE_nt/\hbar)|n\rangle$$

와 같이 H_0의 고유상태인 $|n\rangle$들의 선형결합으로 표시할 수 있다. 여기서 1차 섭동 이론을 이용하여

$$C_n(t) = (1/i\hbar)\int_0^t dt'\{\exp[i(E_n-E_\ell+\hbar\omega)t'/\hbar]\langle n|H_1|\ell\rangle$$

$|H'\ell\rangle$

$$+\exp[i(E_n-E_\ell-\hbar\omega)t'/\hbar]\langle n|H_1^{+}|\ell\rangle\}$$

가 됨을 보여라.

(나) 스핀의 영향과 핵의 운동을 무시할 때 수소 원자의 해밀토니안은 근사적으로 $H_0 = p^2/2m + V(r)$ 로 쓸 수 있다. 이 수소 원자에 벡터포텐셜 $\vec{A}(\vec{r},t)$로 표시되는 전자기파가 입사하는 경우에 총 해밀토니안 H는 어떻게 쓰여지는가?

(다) (나)의 총 해밀토니안 H를 $H = H_0 + H'$으로 쓸 때 전자기파와 수소 원자의 상호작용을 나타내는 섭동항 H'은 어떻게 표시되는가?

(라) 여기서 벡터포텐셜은 $\vec{A}(\vec{r},t) = A_0\ell\cos(k\cdot r-\omega t)$로 표시되고 쿨롱게이지(Coulomb gauge) 조건 $\nabla\cdot A(r,t) = 0$ 을 만족시킨다고 하자. (다)에서의 H'이 H_0보다 충분히 작아서 1차 섭동 이론을 이용할 수 있고 또한 입사한 전자기파의 파장이 원자 정도의 크기 보다 충분히 긴 경우에

$$\boxed{\langle n|\vec{p}|\ell\rangle = im\langle n|\vec{r}|\ell\rangle(E_n-E_\ell)/\hbar}$$

가 됨을 보이고 (가)에서의 $C_n(t)$를 계산하라.

$p = \frac{\hbar}{i}$

$\langle n|\vec{p}|\ell\rangle$

$= \frac{im}{\hbar}(E_n-E_\ell)\langle n|\vec{r}|\ell\rangle$