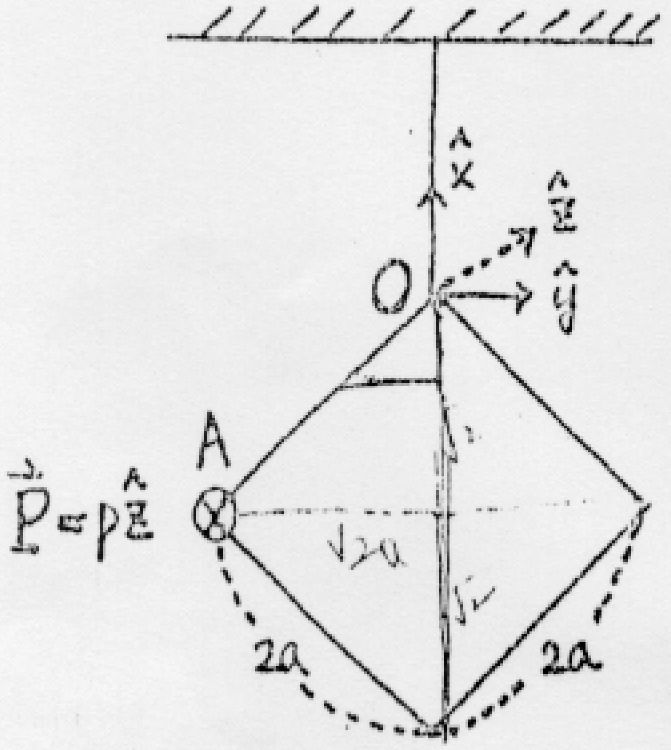
1. 한 변의 길이가 $2a$ 이고 질량이 m인 균일한 밀도의 정사각형 판이 그림과 같이 한 모서리 O에 끈으로 묶여서 매달려 있다. 다른 모서리 A에



충격 $\vec{P}\,(=p\hat{z})$가 판에 수직한 방향으로 $t=0$ 일때 주어졌다고 하자. [※ 여기서 커다란 힘 $\vec{F}$ 가 $0<t<\Delta t$ 동안에 주어지면 충격은 $\vec{P}=\int_0^{\Delta t}\vec{F}\,dt$ 이다]. O점에 대한 $\hat{x}$, $\hat{y}$, 및 $\hat{z}$ 방향 (위 그림 참조) 으로의 주 관성능률 (principal moment of inertia)을 I_x, I_y, I_z 라고 표시하자.

(가) parallel axis 정리와 perpendicular axis 정리를 사용하여 I_x, I_y, I_z 사이에 다음 관계가 있음을 보여라.

$$I_y = I_x + 2ma^2 ,$$

$$I_z = I_x + I_y .$$

1. 3 차원 조화포텐셜 (harmonic potential)

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

에 질량 m인 입자가 갇혀있다.

(가) 이 입자의 바닥상태 (ground state) 에너지 E_0 와 첫째 들뜬 상태 (1st excited state) 의 에너지 E_1 을 구하라. 이 두 상태들의 중첩수 (degeneracy) 는 각각 얼마인가?

(나) 궤도 각운동량 (orbital angular momentum) 을 $\vec{L}$ 이라 할때 바닥상태와 첫째 들뜬 상태는 $\vec{L}^2$ 와 L_z 의 고유상태 (eigenstate) 로 표시할 수 있음을 보여라. 이 두상태의 각운동량 양자수 (quantum number) l 은 각각 얼마인가?

[※ 구면 조화함수 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 는 다음과 같이 주어진다.

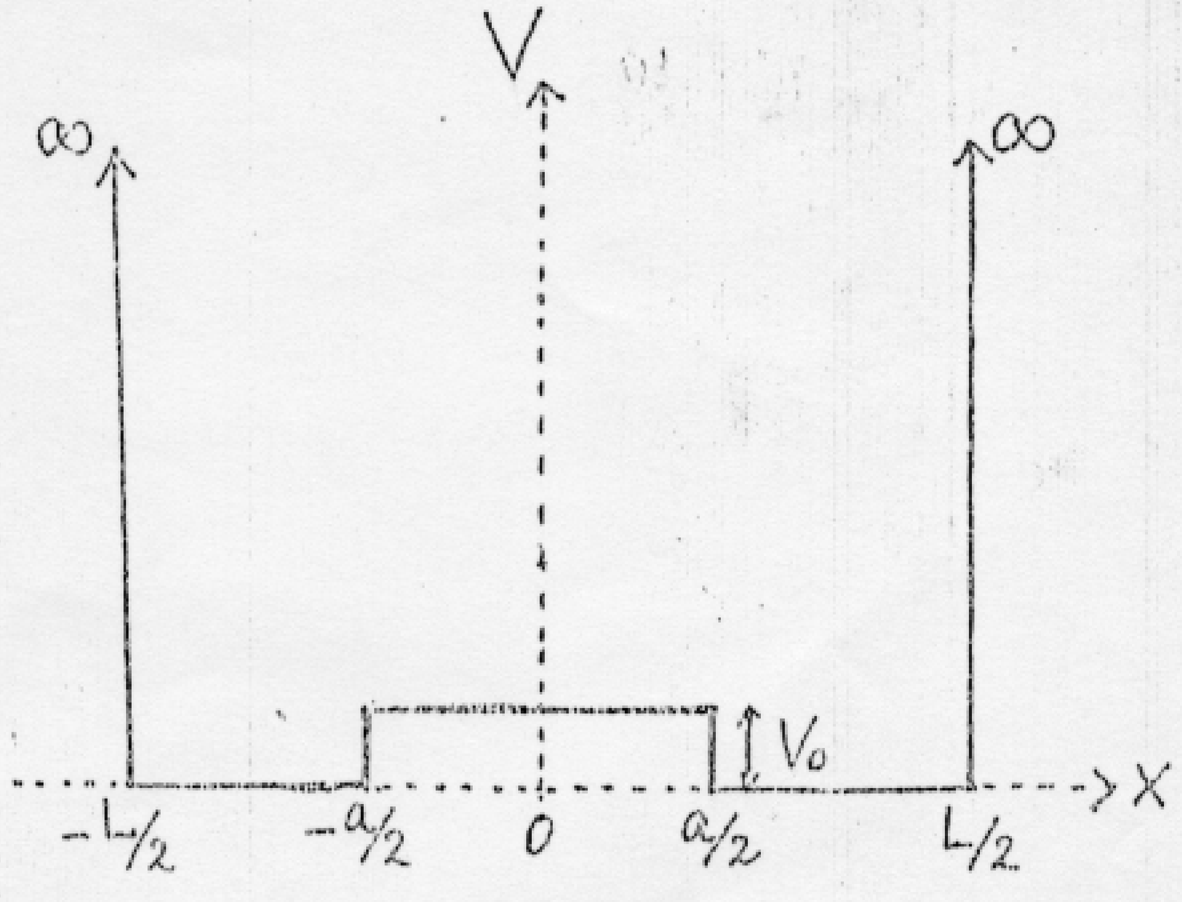
$$Y_{00} = \sqrt{1/4\pi}, \quad Y_{10} = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta,$$
$$Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{3/8\pi}\, e^{\pm i\phi}\sin\theta. \quad]$$

(다) 이제 이 입자가 전하 e, 스핀 $\frac{1}{2}$ 인 전자라고 하자. 이 전자가 바닥상태에 있을 때 자기장 $B\hat{z}$ 를 걸어주고 시간 $t=0$ 에서 스핀의 x-성분

즉 S_x 값을 측정하였더니 $\frac{\hbar}{2}$ 를 얻었다. 이때 전자의 스핀상태를 S_z의 고유상태들의 선형결합으로 표시하라.

(라) 시간에 의존하는 쉬뢰딩거 방정식(time-dependent Schrödinger equation)을 풀어서 (다)의 전자 스핀이 시간 $t = \pi(mc/eB)$ 에는 그 방향이 반대로 됨을 보여라.

$\boxed{2.}$ 상호작용이 없는 두 입자가 1차원에서 아래 그림과 같이 포텐셜 우물(potential well)에 갇혀 있다. 우물가운데의 포텐셜 혹(bump)은 섭동(perturbation)항으로 볼수 있다고 하자.



(문제 $\boxed{2.}$ 계속)

(가) 이 계를 기술하는 두입자의 하밀토니안을 수식으로 표시하고 섭동항으로 취급할 부분을 명시하라.

(나) 두입자가 동일한 질량 m, 스핀-0 인 보존(boson)인 경우에 섭동항을 무시하고 바닥상태에서의 에너지 고유값 및 상태함수를 구하라.

(다) 두 입자가 동일한 질량 m, 스핀-$\frac{1}{2}$ 인 페르미온(fermion)인 경우에 섭동항을 무시하고 바닥 상태에서의 에너지 고유값 및 상태함수를 구하라.

(라) 우물 가운데의 포텐셜 혹을 1차 섭동이론(first-order perturbation theory)에 따라 고려하면 (나) 및 (다) 에서의 에너지 고유값에 얼마만큼 변화가 있는가?

(나) I_x, I_y, I_z 의 값들을 구하라.

(다) 충격을 받은 직후의 각속도 $\vec{\omega}$ 를 구하라.

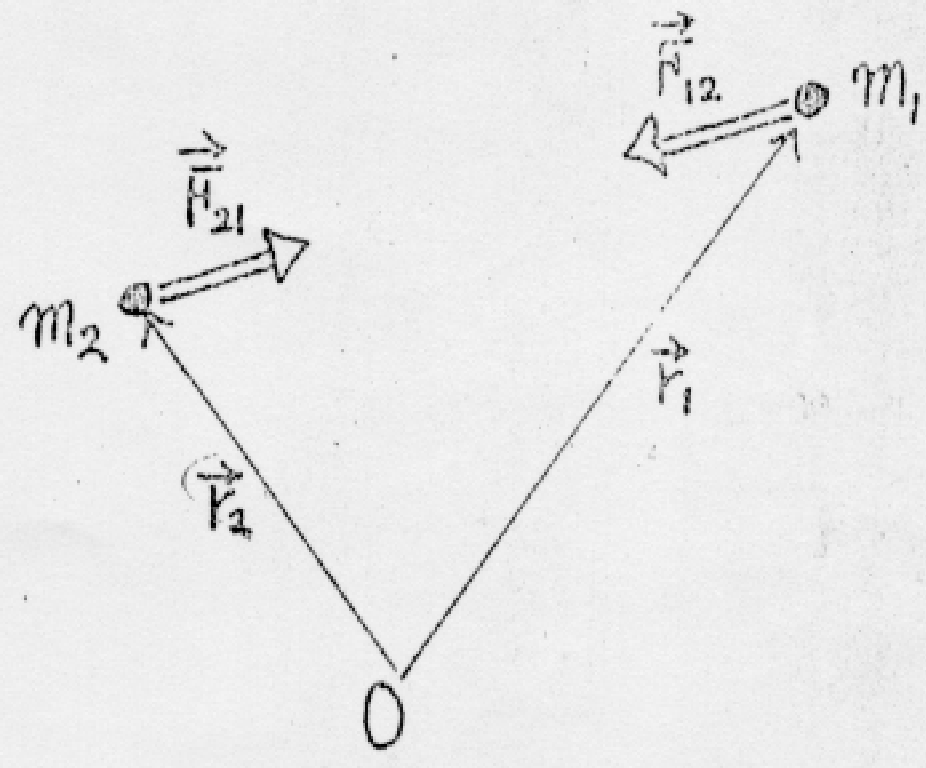
(라) 판의 모서리 O를 손으로 잡고있을 때 A점에서의 충격 $\vec{P}$에 의하여 손에 느껴지는 충격량은?

$\boxed{2.}$ 질량이 각각 m_1, m_2 인 두물체가 상호력

$$\vec{F}_{12} = -C \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{2+\alpha}}$$

(여기서 C, α는 주어진 양수, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z$ 및 $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 는 물체의 위치벡터

에 따라 움직이고 있는 계를 생각하자 (그림참조)



(문제 $\boxed{2}$ 계속)

(가) 이 계에 맞는 라그랑지안 $L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$ 을 구하고 그로부터 얻어지는 라그랑지 방정식은 뉴우톤 운동방정식과 부합함을 보여라.

(나) 이 계의 하밀토니안 $H(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2)$ 를 구하고 그로부터 얻는 하밀톤 방정식 역시 뉴우톤 운동방정식과 부합함을 보여라.

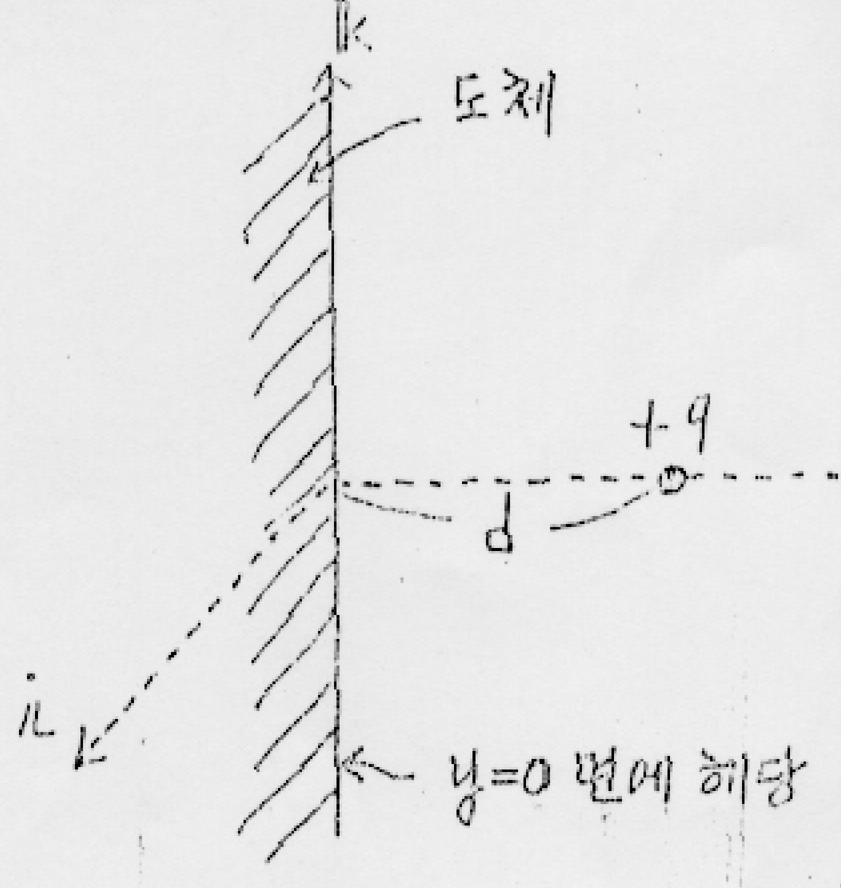
(다) 하밀토니안을 일반화 좌표

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \;; \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

와 대응하는 정준운동량 (canonical momenta)을 써서 나타내 보아라.

(라) 좌표 $\vec{R}$ 은 순환변수 (cyclic variable)에 해당한다. 이 사실이 내포하는 물리적 의미 및 주요결과를 말하라.

[3.] 아래 그림과 같이 무한히 큰 접지된(grounded) 평면 도체로부터 d 만큼 떨어진 지점에 전하 $+q$ 가 놓여 있다.



(가) $y>0$ 영역내의 임의점 $P=(x,y,z)$ 에서의 정전포텐셜 $\Phi(x,y,z)$ 는 어떻게 주어지는가? (그 근거도 함께 제시할 것).

(나) 도체 표면에 유도되는 전하밀도 $\sigma(x,z)$ 를 구하라. 또 도체에 유도되는 총 전하는?

(다) 그림에 주어져 있는 (즉 도체에서 d 만큼 떨어진 지점에 있는) 전하 $+q$ 가 받는 힘은? 또 이 전하를 도체로부터 무한히 멀리 떨어지게 하는데 드는 일의 양은?

(문제 $\boxed{3.}$ 계속)

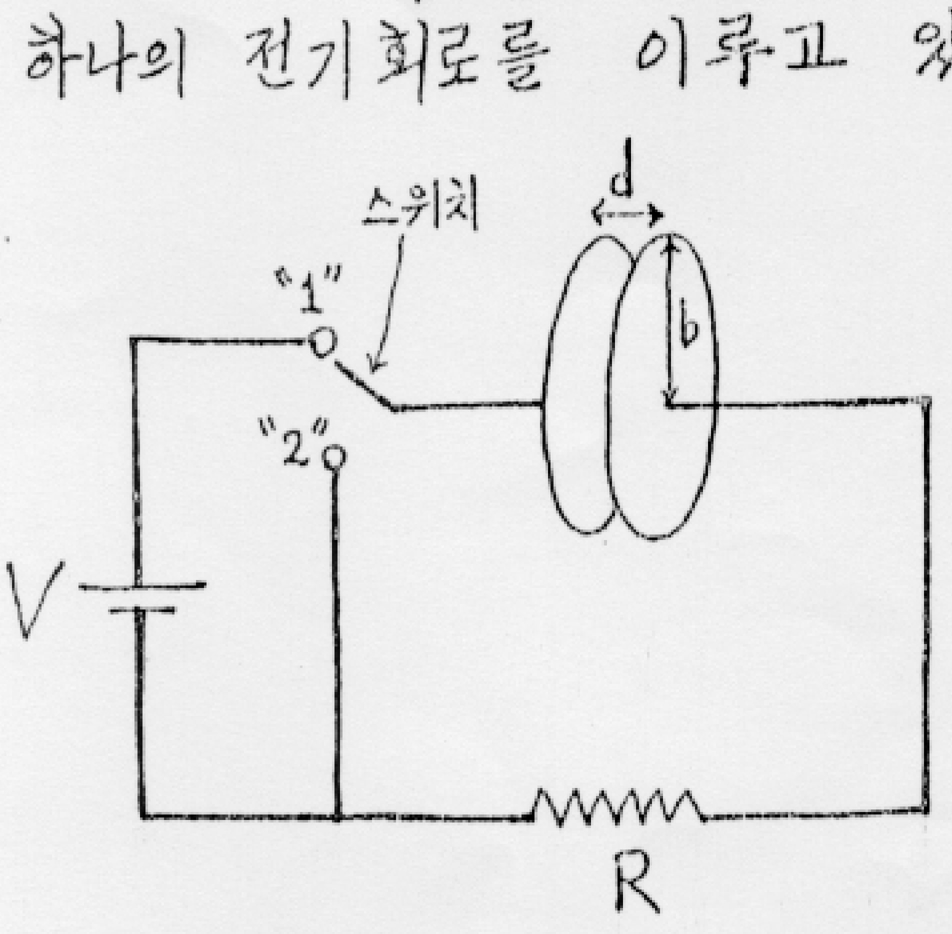
(라) 이제 도체에서 d 만큼 떨어진 지점에 전하 $+q$ 대신 electric dipole $\vec{p} = p\,\hat{j}$ 가 놓여져 있다하고 $y>0$ 영역내의 임의점 $P=(x,y,z)$ 에서의 정전 포텐셜을 구해보아라.

$\boxed{4.}$ 진공에서의 맥스웰 방정식은 SI 단위계를 쓰면 다음과 같다.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \quad , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad ,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad .$$

반경이 b인 두 원형판 사이의 간격이 d인 평행판 축전기(capacitor)를 생각하자. 이 축전기가 아래 그림과 같이 저항기(전기저항 : R), 전지(기전력 : V) 들과 하나의 전기회로를 이루고 있다.



"1" 의 스위치 상태에서 평형을 이루고 있다가 시간 $t=0$ 에서 스위치가 2의 상태로 옮겨졌다고 하자.

(가) 축전기에 있는 전하의 크기 $Q(t)$ (여기서 $t>0$) 를 시간의 함수로 구하라.

(나) 축전기 내에 흐르는 변위전류(displacement current)의 크기는 도선을 통하는 전류의 크기와 같음을 보여라.

(다) 축전기 내의 중심으로 부터 거리가 r인 점에 존재하는 자기장의 크기와 방향을 구하라.

(라) 또한 (다)와 같은 점에서의 Poyrting vector를 구하고, 전하가 방전(discharge) 되는 동안의 에너지 보존에 대하여 논하라. (edge field effect는 무시할 것).

5. 상호작용이 없는 입자 2개로 이루어진 계를 생각하자. 각 입자는 M개의 상태를 가질 수 있다고 하고 이들 **상태의** 에너지는 ϵ_i ($i=1, \cdots, M$) **라 하자.** 다음 물음에 답하라

(가) 이 입자들이 보오즈(bose) 통계를 따르는 입자라면 이 2-입자계는 몇개의 상태에 있을 수 있겠는가?

(나) 페르미(fermi) 통계를 따르는 입자라면 몇개의 상태가 가능한가?

(다) 이 계가 온도 T에서 평형을 이루고 있을 때의 헬름홀쯔 자유 에너지를 보오즈 및 페르미 통계를 따르는 각 경우에 대하여 ϵ_i, T, M 등의 기호로 나타내어 보아라.

(라) M이 크고 온도가 충분히 높을때 (다)의 결과가 고전적인 (즉 맥스웰-볼쯔만 통계를 적용한) 결과로 환원됨을 보여라.

6. (가) z-방향의 자기장 H 속에 있는 $S=\frac{1}{2}$인 스핀이 갖는 하밀토니안은

$$\mathcal{H}' = -\mu H S^z$$

이다. 여기서 S^z 는 스핀의 z-성분 $(\pm\frac{1}{2})$ 이고 μ는 자기 모멘트이다. 온도가 T 일때 S^z 의 기대값 $\langle S^z \rangle$ 를 구하라.

이제 다음과 같은 하밀토니안을 갖는 이징 모형 (Ising model) 을 생각하자

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z \quad .$$

여기서 S_i^z 는 i-번째 스핀의 z-성분 $(\pm\frac{1}{2})$ 이고 J (>0) 는 교환 상호작용 (exchange interaction) 이다. $\langle i,j \rangle$ 는 제일 가까운 이웃 (nearest neighbor) 에 위치하는 서로 다른 스핀 쌍을 나타낸다. 평균 장 어림셈법 (mean-field approximation) 을 쓰면 i-번째 스핀에 미치는 이웃스핀들의 영향을 유효자기장 H_0 를 써서

$$\mu H_0 = J \sum_j \langle S_j^z \rangle$$
$$= N J \langle S^z \rangle$$

로 표시할 수 있다. [여기서 첫식의 S_j^z 는 S_i^z 로 부터 제일 가까운 이웃 스핀들이고 그 총갯수가 N 이며

(문제 $\boxed{6.}$ 계속)

$\langle S_j^z \rangle$ 는 j 에 무관하다고 보아 두째 식에서 $\langle S^z \rangle$ 로 썼다].

(나) $\langle S^z \rangle$ 가 만족하는 자체충족식 (self-consistency equation) 을 구하여라.

(다) $\langle S^z \rangle > 0$ 인 해가 존재하기 시작하는 온도 T_c (임계온도) 가 있음을 보이고 그 값을 구하라. [※ 그라프를 이용하여 설명해도 좋다].

(라) $T < T_c$, $\dfrac{T_c - T}{T_c} \ll 1$ 인 경우 $\langle S^z \rangle$ 를 T 와 T_c 만의 함수로 나타내어라.