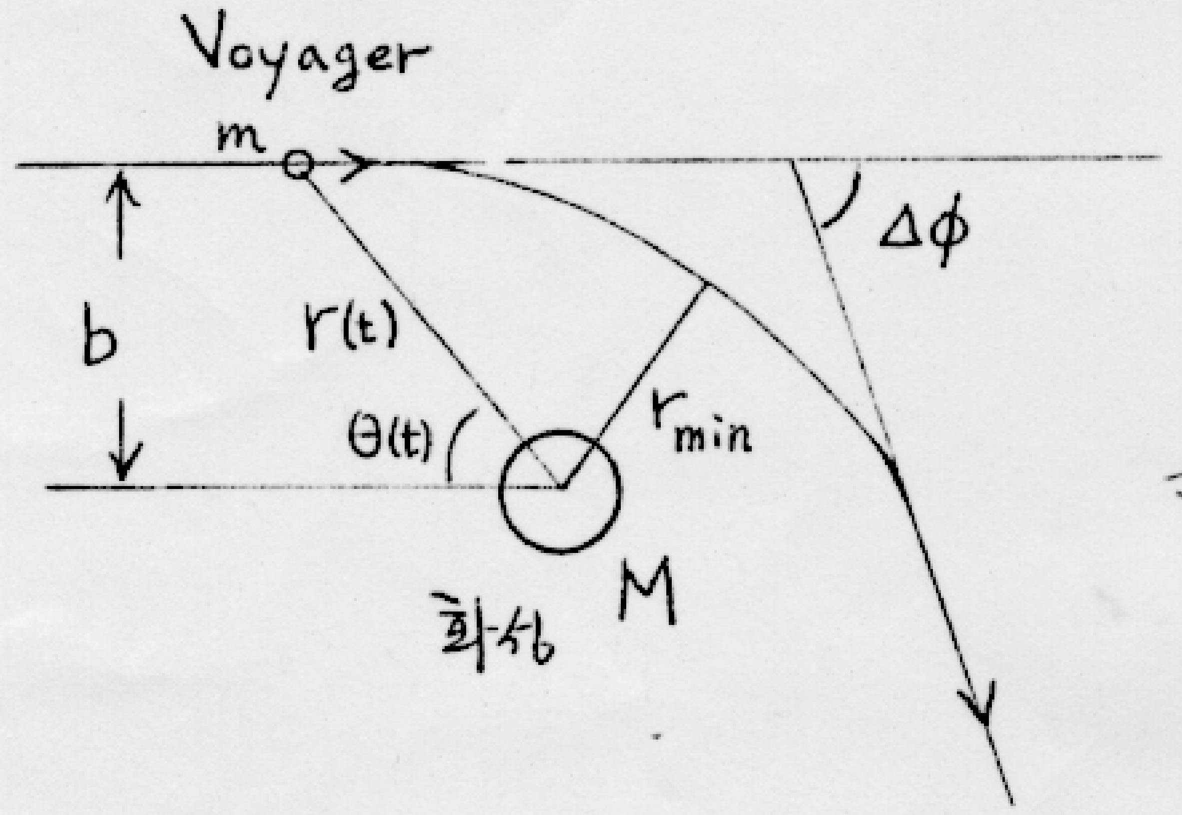
1. 1986 년 우주탐사위성 Voyager호는 화성을 근접 촬영하는데 성공하였다. Voyager호의 운동궤도에 관하여 다음 물음에 답하라. Voyager호의 질량을 m, 화성의 질량을 M, 만유인력상수를 G 라고 하고 Voyager 호가 운동하는 동안 화성은 정지해 있는 것으로 가정한다.



$\vec{r}\times\vec{p}'$
$=\vec{r}\times m v_0$

(가) 멀리 떨어진 곳에서 Voyager호가 초기속도 v_o, 충격계수(impact parameter) b 로 정지해 있는 화성을 향해 입사할 때 보존되는 물리량들의 보존식을 적어라.

(나) Voyager호가 화성에 최대로 근접한 거리를 r_{min} 이라고 한다. (가)로부터 $x \equiv GM/(bv_o^2) \ll 1$ 인 경우 r_{min}/b 를 x 의 1 차항까지 근사계산하라.

X (다) $x \ll 1$ 인 근사조건에서 입사궤적과 충돌궤적사이의 꺽임각(deflection angle) Δφ 를 x 의 1차항까지 근사계산하라.
[힌트: $x \ll 1$ 일 때 $\int_o^{1+x}(1+2xz-z^2)^{-1/2}\,dz \approx \sin^{-1}\{(1+x^2)^{-1/2}\}$ 를 이용한다.]

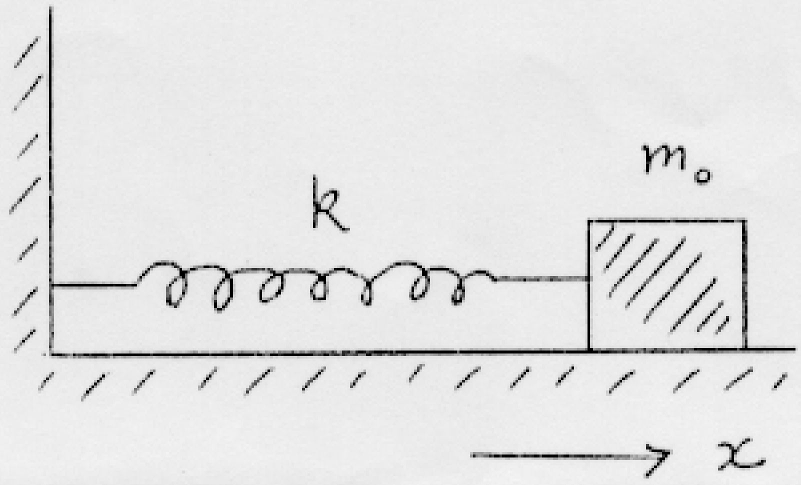
2. 조화진동에서의 특수상대론적인 효과를 섭동방법으로 다루기로 한다. 그림과 같이 질량이 0 인 가상적 스프링에 매어진 정지질량 m_o 의 물체가 면과의 마찰이 없이 운동하며 물체에 가해지는 힘은 Hooke 의 법칙을 따른다고 가정한다. 이때

물체의 운동방정식은

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}\right) = -kx$$

($\omega_0^2 = k/m_0$, k 는 스프링 상수)

로 주어진다.



(가) 위의 운동방정식을 $|\beta| \ll 1$ 인 조건에서 β^2 항까지 근사적으로 표현하라. (여기서 $\beta = \dot{x}/c$ 이다.)

[힌트: $|\beta| \ll 1$ 인 조건으로부터 구하는 운동방정식은 비상대론적 운동방정식 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ 에서 크게 벗어나지 않음을 알 수 있고, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\dot{\gamma} / \gamma = \beta\dot{\beta} / (1-\beta^2)$ 을 이용한다.]

(나) (가)에서 구한 운동방정식을 관찰하여 물체의 각진동수가 비상대론적 각진동수 ω_0 보다 큰가 작은가를 적고 그 이유를 설명하라.

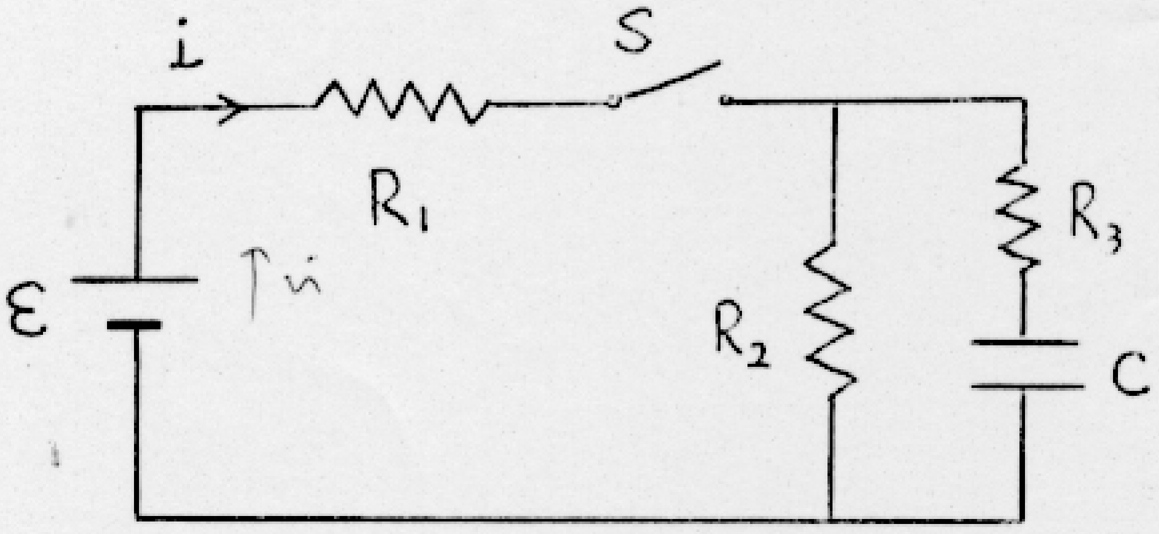
(다) (가)의 운동방정식(비선형방정식임)의 해가 비상대론적인 경우의 해 $x = x_0 \cos\omega_0 t$ 의 형태에서 크게 벗어나지 않을 것임을 상기하여, 이 물체의 진동수를 $\beta_0^2 = (x_0\omega_0/c)^2$ 항까지 추정하라.

[힌트: 물체의 순간각속도의 rms 값을 생각한다.]

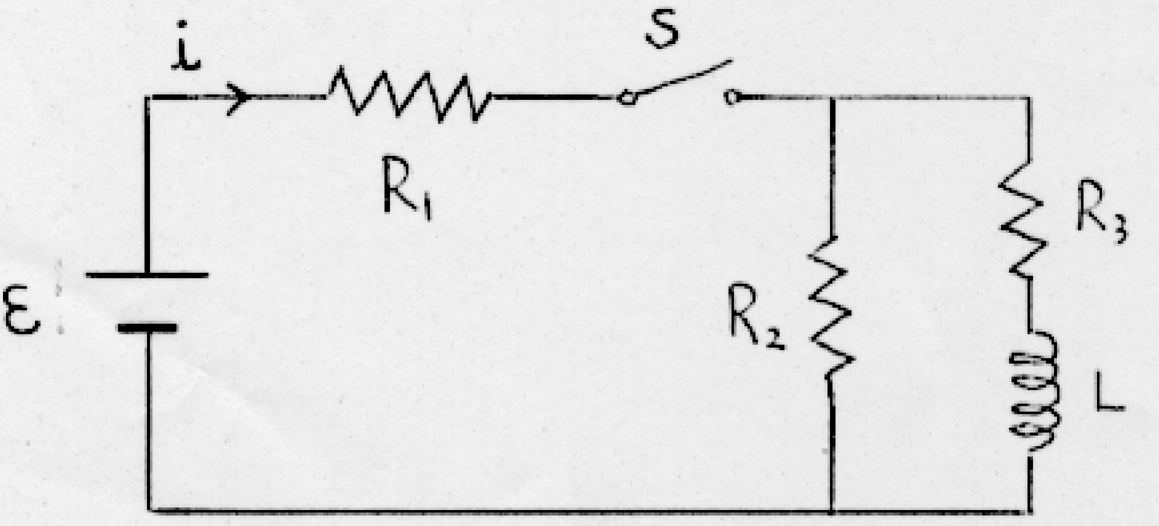
3. (가) 그림 1 에서 ε = 600 V, $R_1 = R_2 = R_3$ = 100 Ω, C = 1 μF 이다. 축전기 C 가 충전되지 않은 상태에서 t = 0 일 때 스위치 S 를 닫았다. 스위치를 닫은 직후($t = 0^+$)와 충분한 시간이 지난 다음($t \to \infty$)의 전지에 흐르는 전류 i 를 각각 구하라.

(나) 그림 2 에서 ε = 600 V, $R_1 = R_2 = R_3$ = 100 Ω, L = 1 mH 이다. 스위치를 닫은 직후 ($t = 0^+$)와 충분한 시간이 지난 다음($t \to \infty$)의 전지에 흐르는 전류 i 를 각각 구하라.

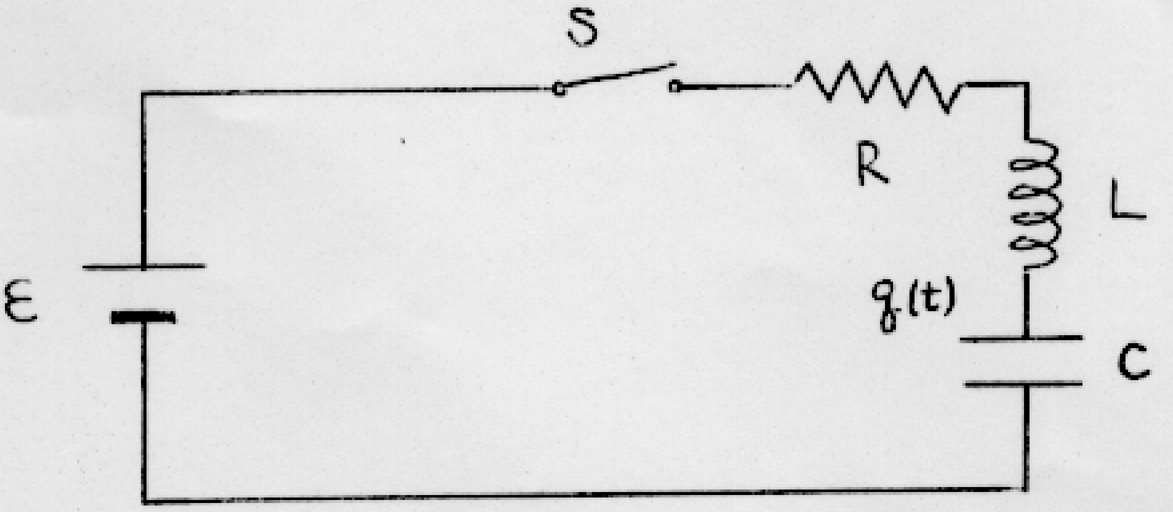
(다) 그림 3 의 회로에서 축전기 C 가 충전되지 않은 상태에서 t = 0 일 때 스위치 S 를 닫았다. $R^2 - 4L/C > 0$, $R^2 - 4L/C = 0$, $R^2 - 4L/C < 0$ 인 경우 각각에 대해 $t \geq 0$ 에서 축전기 C 의 한쪽 전극에 대전된 전기량 q(t) 가 어떻게 다른 모양을 보이는지 그림으로 나타내고 또 간단히 설명하라.



(그림 1)



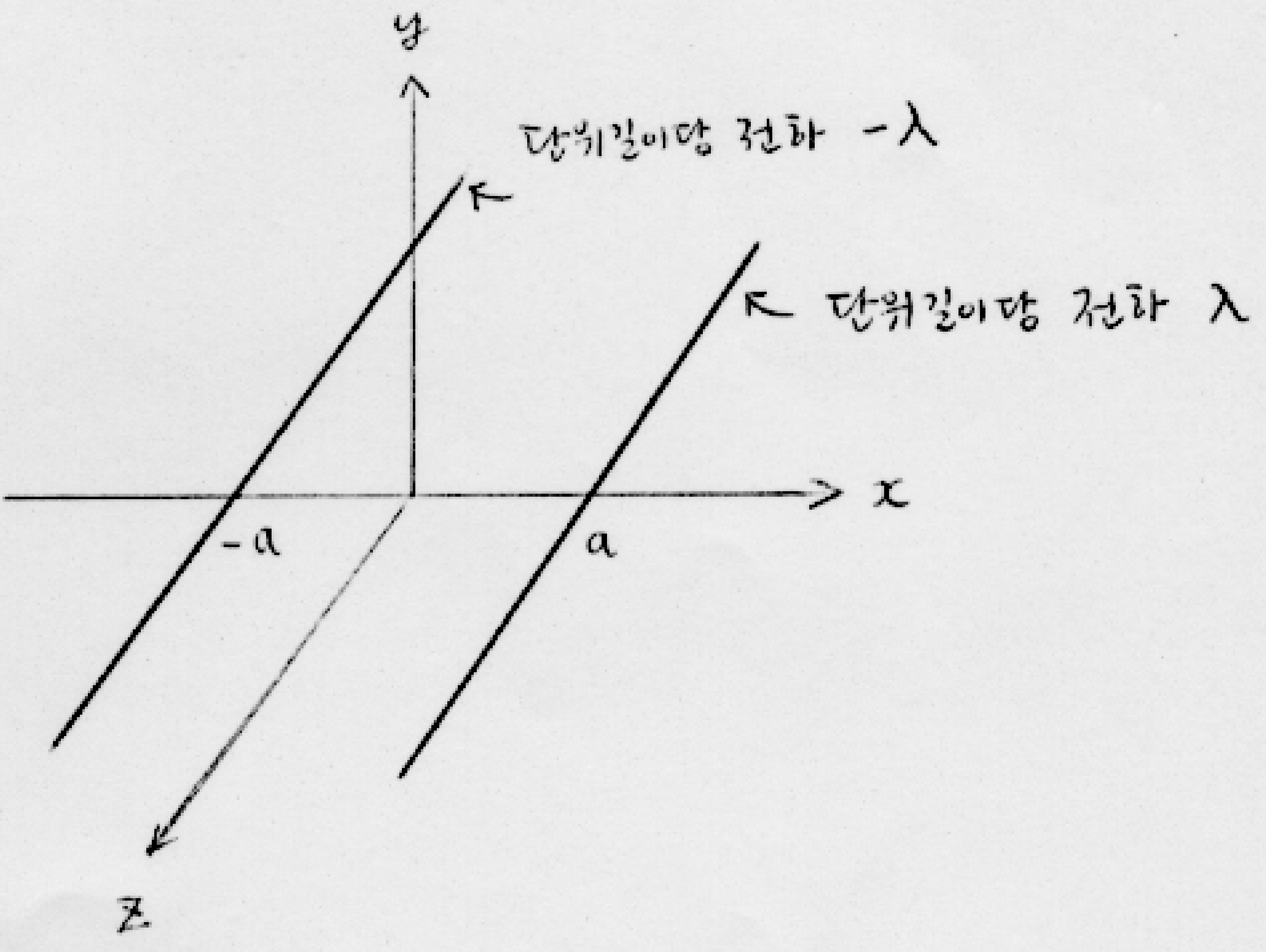
(그림 2)



(그림 3)

4. (가) 균일한 전하밀도 λ 를 가진 무한히 긴 직선이 z축(x=y=0)에 놓여있다. 이 선전하분포에 의한 전기마당(전기장)을 전 공간에서 구하라.

(나) 아래의 그림과 같이 단위 길이당의 전하가 각각 λ 와 -λ 인 무한히 긴 두 선이 z 방향으로 평행하게 놓여 있다고 가정하자. 각각의 위치는 (x,y)=(a,0) 와 (-a,0) 이다.



공간의 임의의 점 P(x,y,z) 에서의 전기 포텐샬 $\phi(x,y,z)$ 을 구하라.

(다) (나) 에서 $\phi(x,y,z) = \phi_o$ (ϕ_o : 일정) 인 등전위면을 찾으면 이는 $(x - a \coth\eta)^2 + y^2 = (a/\sinh\eta)^2$ 를 만족하는 원통(cylinder)임을 보이고 이때 η 의 값을 구하라.

5. 열역학의 기본 관계식인 $dQ = dU + PdV$ 를 이용하여 다음 물음에 답하라.

(가) 정적비열을 c_v, 정압비열을 c_p 라고 할 때, 이상기체 1 몰(mole)의 비열차 $c_p - c_v$ 를 구하라. 그리고 $\gamma \equiv c_p/c_v = 1 + (c_p-c_v)/c_v$ 라고 할 때, γ 의 값은 주어진 이상기체의 어떠한 성질에 의해서 결정되는가 적어라.

(나) Van der Waals 기체의 상태방정식은

$$(P + a/v^2)\ (v - b) = RT$$

로 주어진다. 여기서 R 은 기체상수, v 는 기체 1 몰의 부피를 나타낸다. 이 기체의 열팽창계수 $\alpha \equiv v^{-1}(\partial v/\partial T)_P$ 가 이상기체의 열팽창계수와 같아지는 온도를 구하라.
[힌트: $\varepsilon_1 \equiv b/v << 1$, $\varepsilon_2 \equiv a/(RTv) << 1$ 인 조건에서 ε_1 과 ε_2 의 1차항까지 근사적으로 구한다.]

(다) Van der Waals 기체 1 몰의 에너지는 T 와 v 의 함수로

$$u = c_vT - a/v + a/b$$

라고 표시할 수 있다.
이때 $c_p - c_v$ 는 $v >> b$, $P >> a/v^2$ 인 조건에서, (가) 에서 구한 양에 비해 얼마만한 변화가 있는지 그 차이를 $(1/v^2)$ 차항까지 근사적으로 구하라. 또, 이 차이가 갖는 물리적 의미를 한 문장정도로 간단히 설명하라.

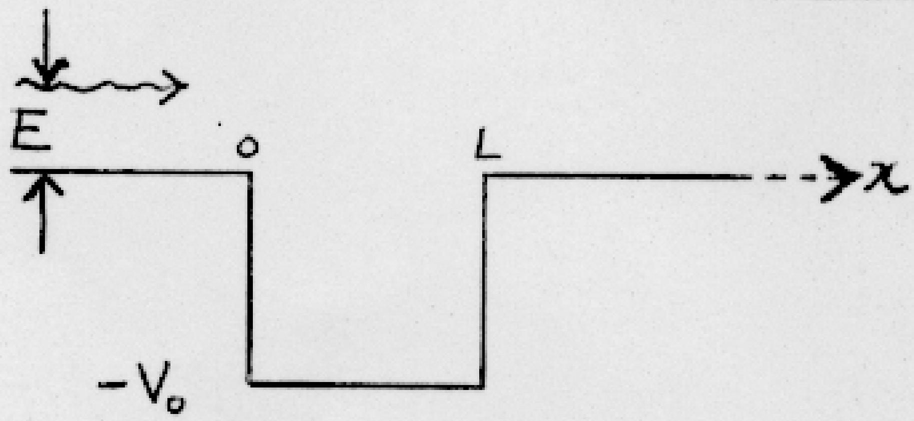
6. 부피 V 인 용기에 질량 m 인 비상대론적인 자유 전자가 N 개 들어있다. N/V 가 유한하고 $V \to \infty$ 인 열역학적 극한을 생각한다.

(가) 이 물리계의 바닥상태(즉, $T = 0$)에서의 총 에너지는 $U_o = (3/5)N\varepsilon_F$ 로 주어짐을 보여라. 여기서 Fermi 에너지 $\varepsilon_F = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 N/V)^{2/3}$ 이다.

(나) $T = 0$ 에서 이 용기에 작용하는 압력 P 를 구하라. 또, 고전적 이상기체의 경우 $T = 0$ 일 때 $P = 0$ 인 것과 비교하여 이 압력이 생기는 원인을 간략히 설명하라.

(다) 중성자별에서와 같이 N/V 가 매우 커지는 경우 자유전자 각각의 에너지 ε 와 운동량 p 사이에는 $\varepsilon = pc$ 의 관계가 근사적으로 성립한다. 여기서 c 는 빛의 속도이다. 이 물리계의 ε_F 와 바닥상태에서의 총에너지 U_o 를 N 과 V 의 함수로 표시하라.

1. 그림과 같은 1 차원 포텐샬 우물에 질량 m 인 입자가 x = − ∞ 로부터 에너지 E (E>0)를 가지고 입사한다.



(가) 이 문제를 풀기 위한 Schrödinger 방정식을 구하라.

(나) 반사율과 투과율의 비를 구하라.

(다) 포텐샬이 $V = -S\delta(x) = -LV_o\delta(x)$ 인 경우의 반사율과 투과율의 비를 구하라. 이때 (나) 에서 얻은 값으로부터 $V_o \to \infty$, $L \to 0$ (단, $V_oL = S =$ 일정)인 극한을 취해 구해도 된다.

2. 해밀토니안이 $H = A L^2 + B L_z + C L_y$ 로 주어진 계를 고려하자. 여기서 A, B, C 는 상수이며, L^2 과 L_z 의 고유상태(eigenvector)를 $|\ell,m\rangle$ 으로 표시하기로 한다.

(가) $|C| \ll |B|$ 인 경우 시간에 무관한 섭동(time independent perturbation) 이론을 써서 에너지 고유값(eigenvalue)들을 구하라. 단, 처음으로 0 이 되지 않는 보정항까지만 계산한다.

[힌트: 2차항 섭동보정이 필요한 경우에는

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|\Delta H|n\rangle|^2}{E_n^{\circ} - E_k^{\circ}}$$

을 이용하라. 이때 E_n°, E_k° 는 보정되지 않은 상태의 고유값이고, $|k\rangle$ 와 $|n\rangle$ 은 보정되지 않은 상태의 고유벡터들이며, ΔH 는 섭동 해밀토니안이다.]

(나) (가)의 경우에 $\ell = 1$ 인 고유벡터들을 섭동 이론을 써서 C 의 1 차항까지 구하라.

[힌트: 고유벡터 $|n\rangle$ 에 대한 1 차 섭동 보정항은

$$\sum_{k \neq n} \frac{\langle k|\Delta H|n\rangle \, |k\rangle}{E_n^{\circ} - E_k^{\circ}}$$

으로 주어진다.]

(다) 적당한 좌표변환을 함으로써 위의 해밀토니안을 commuting 연산자들만으로 표시할 수가 있음을 보이고, 에너지 고유값들을 근사를 쓰지 말고 정확하게 구하라.