1998학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리학 (석사과정)

1. 태양계 주변에 분포하는 암흑 물질 (dark matter) 은 행성의 궤도 운동에 중요한 영향을 미칩니다. 이 암흑 물질이 균일한 질량 밀도 ρ 로 분포되어 있다고 하겠습니다. 이 성간 물질 속에서 지구가 태양 (태양질량 M) 을 중심으로 반경 r_0 의 공전운동을 하고 있습니다. 지구와 암흑물질 사이의 마찰에 의한 힘은 무시하겠습니다.

(가) 지구의 질량을 m 이라고 할 때 성간 물질에 의한 추가적인 힘을 유도하면

$$F_{\text{성간물질}}(r) = -k\,m\,r\,\hat{r}$$

으로 나타내어 집니다. 비례상수 k 를 구하십시오.

(나) 지구가 태양 주위를 보존되는 각운동량 L 을 가지고 원운동을 하고 있습니다. 극좌표계를 사용하여 위에서 유도한 힘을 고려한 후의 운동방정식을 구하고 이로부터 평형 상태의 운동 궤도 반경 r_0 가

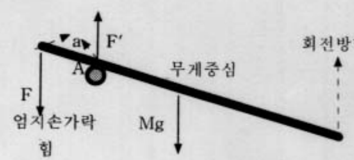
$$-\frac{GMm}{r_0^2} - mkr_0 + \frac{L^3}{mr_0^3} = 0$$

등식으로부터 결정됨을 설명하십시오.(참조: 극좌표계 가속도는 $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta},\ 0)$임).

(다) 위의 운동 방정식을 평형 궤도 반경 r_0 근처에서 일차항 까지 근사 전개하여 반경 방향의 운동이 조화 운동임을 보이고 그 각진동수 (angular frequency) ω_r을 구하십시오.

(라) 반경 방향의 각진동수 ω_r 와 공전 운동의 각진동수 $\Omega = \dot{\theta}$ 의 상대 크기의 비율을 계산하기 바랍니다. 관측에 따르면 이 비율은 1.000001이라고 합니다. 이로부터 암흑물질의 질량밀도 ρ 를 구하시오. (참고: 중력상수 $G = 6.7\times10^{-11} m^3/s^2\cdot kg$ 으로, 1년은 $3\times10^7 s$으로 근사하십시오.)

2. 질량 M, 길이 L인 젓가락의 끝부분을 엄지와 검지 손가락 사이에 잡고 엄지를 사용하여 힘 F를 주어 위아래로 흔드는 경우, 막대에 작용하는 힘은 아래 그림과 같이 중력과 손가락이 작용하는 두 힘으로 단순화 할 수 있습니다. 이 때 아래쪽 지지점 A는 막대 끝에서 거리 a 인 지점이며 고정되어 있다고 보겠습니다.



(가) 점 A 에 대한 막대의 회전 관성 (moment of inertia)을 구하십시오.

(나) 젓가락의 각속도가 순간적으로 시계반대방향으로 $\delta\omega$ 만큼 증가하도록 힘이 가하여 졌습니다. 이때 두 힘의 시간 적분 즉 충격량 (impulse)을 구하시오.

(다) 젓가락이 수평상태에 이르는 순간 (이때 순간 각속도는 ω) 두 손가락을 모두 떼어 중력만에 의한 자유운동을 하도록 하였습니다. 무게 중심이 초기상태에서 최대 높이 H 까지 올라갔다면 그 동안 젓가락이 회전한 각도 θ 를 구하시오. 단 공기저항은 무시하여도 좋습니다.

(라) $a \ll L$ 이라고 가정하고 젓가락이 완전히 한바퀴 돌아 원래 위치로 정확히 되돌아와 다시 손으로 잡을 수 있으려면 질량 중심이 길이 L 의 몇배 올라 가야합니까?

1998학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리학 (석사과정)

1997. 11. 29.

역학·전자기학·열및통계역학　　4면중2

3. 넓은 도체판을 잘못놓아 그림과 같이 도체판 사이가 각 θ_0 를 이루고 있습니다. 두 도체판 사이에 전위차 V_0 (도체판 1에 V_0, 도체판 2에 0)를 가한 후 두 도체판 사이의 전기장 및 전위를 구하려 합니다. 단, 도체판이 크기 때문에 모서리 효과는 무시하고 도체판 사이의 전기장 및 전위도 z 에는 무관하다고 가정합시다.

가) 두 도체판 사이의 점 $(x,y,b/2)$의 전위를 Laplace방정식으로부터 구하시오. (힌트: 원통형 좌표계를 이용하면 편리함).

나) 가)의 결과를 이용하여 두 도체판 사이의 전기장을 구하시오.

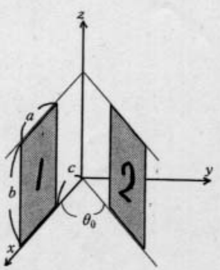
다) 도체 표면의 전하 밀도는 얼마입니까? 그리고 각 도체판의 전체 전하 Q 를 구하시오.

라) 이 축전기의 전기용량은 얼마입니까? 두 도체판 사이 거리 d 는 일정 유지하며 $\theta_0 \to 0$ 이면 두 도체 사이의 전기용량은 $\sigma A/d$ 임을 보이시오.

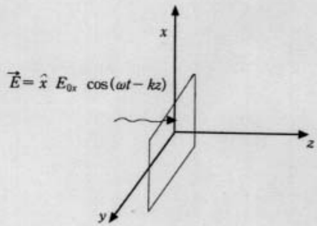
참고: $\vec{\nabla}A = \hat{\rho}\frac{\partial A}{\partial \rho} + \hat{\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial A}{\partial z}$;

$\vec{\nabla}^2 A = (1/\rho)\partial/\partial\rho(\rho\partial A/\partial\rho) + (1/\rho^2)\partial^2 A/\partial\theta^2 + \partial^2 A/\partial z^2$,

$$\int^x \frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$



4. 그림과 같이 빛을 흡수하는 평판이 놓여있고 평면전자파가 z-방향으로 입사하고 있습니다. 이 평판위의 $x=y=z=0$ 점에 정지해 있던 전자 하나의 운동은 $\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E_{0x}\cos\omega t$ 로 기술됩니다. (q : 전자 전하, m : 전자 질량, β: 감쇄계수, ω_0 : 조화 각진동수)



가) 전자의 속도 $V_x = dx/dt$ 를 구하시오.

(힌트: 이와 유사한 물리계인 LRC회로가 교류전압원 $E = E_0 \sin\omega t$ 에 직렬연결된 경우 회로에 흐르는 전류는

$$i = \frac{E_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega}C)^2}}, \quad \tan\delta = \frac{\left|\omega L - \frac{1}{\omega}C\right|}{R}$$

입니다)

나) $\omega = \omega_0$ 일 경우 전자가 받는 z-방향의 평균힘 F_z 을 구하시오.

다) $\omega = \omega_0$ 일 경우 전자파가 전자에게 해준 평균일률 (power) $\frac{dW}{dt}$를 구하시오.

라) 위의 나),다) 결과로부터 $\frac{W}{c} = p$ 임을 보이시오.

(단 W:전자파의 에너지, p : 운동량)

1998학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물 리 학 (석사과정)

1997. 11. 29.

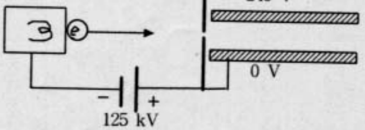
역학 · 전자기학 · 열 및 통계역학 4면중 3

5. 오실로스코프의 전자총 음극에 -125 kV의 전압이 슬릿에 대해 걸려 있습니다. 슬릿뒤에는 그림과 같이 x-방향 (전자의 진행방향)으로 길이 5 cm, y-방향으로 0.8 cm 간격의 평행판이 장치되어있습니다. 전자는 정지상태에서 출발하여 슬릿쪽으로 가속되어 결국은 평행판을 통과하게 됩니다. 이때 평행판은 윗판이 아랫판에 대하여 240 V의 전압으로 유지되어 있습니다. (전자의 '정지질량'은 0.5 MeV)

가) 전자가 슬릿에 도착했을 때, 전자의 운동에너지와 전자의 운동량은 얼마입니까?

나) 전자가 평행판사이를 지날 때 느끼는 전장의 세기(V/m), 전자에 작용하는 y-방향의 힘(N), 전자가 평행판을 지나는데 걸리는 시간, 통과후 y-방향의 운동량과 x-축과의 각 θ 를 구하시오.

다) 이때 우연히 전자와 나란히 가던 중성자가 평행판을 통과하며 다음의 관측을 보고하였습니다. "이 평행판이 우리에게로 [ ] m/s의 속도로 날아왔다. 평행판의 길이는 [ ] m 이었고 우리는 그속에서 [ ] s 동안 갇혀있었다. 이는 나에게는 아무런 영향도 미치지 못했으나 [ ] V/m의 전기장은 전자를 가속시켰고 결과적으로 평행판에서 벗어났을 때 전자는 [ ] m/s의 속도로 멀어져 갔다." 괄호안의 내용을 채우시오.



6. 대폭발 (big bang) 이후 약 1초 경과한 당시 우주의 온도는 $k_BT \approx 10$ MeV (즉 $T \approx 10^{11}$ K) 이었습니다. 이 당시 우주는 전자 (e^-), 중성미자 (ν), 양전자 (e^+), 반 중성미자($\bar{\nu}$), 양성자 (p) 그리고 중성자 (n)들이 열 평형상태를 이루고 있었습니다. (참고: 다음 문항들에서는 간략히 m_p(양성자 질량) $\approx m_n$(중성자 질량)≈ 1000 MeV/c^2, $\ln 10 \approx 2.3$, $\hbar c \approx 2\times 10^{-13}$ MeV · m 으로 근사하여 계산하여도 무방합니다. 또한 열파장 (thermal wavelength)은 $\lambda_T = \sqrt{\dfrac{2\pi^2\hbar^2}{mk_BT}}$ 으로 정의됨을 밝혀드립니다.)

(가) 이 당시 우주안의 양성자 밀도는 $\rho_P \approx 10^{32}$ m^{-3} 이라고 합시다. 이 경우 양성자들은 Boltzmann 통계를 만족하는 고전적인 이상기체로 근사할 수 있음을 간단히 설명하십시오.

(나) 고전적 이상기체의 Helmholtz 자유에너지는

$$F = -k_BTN\left(\ln\frac{V}{N\lambda_T^3}+1\right)$$

로 표시됩니다. (V와 N은 각각 당시 우주의 부피와 입자 개수). 이로부터 양성자의 화학 포텐샬 μ_P 를 계산하십시오.

(다) 이 당시 우주는 $n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ 라는 반응과 $n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}$ 라는 반응들을 통하여서 열 평형상태를 이루고 있습니다. 이 경우 전자의 화학 포텐샬 μ_e 과 양전자의 화학 포텐샬 μ_e 사이의 관계식을 구하십시오.

(라) 이 당시 전자, 양전자, 중성미자, 반 중성미자의 화학 포텐샬의 절대값들이 모두 k_BT 보다 충분히 작았다고 한다면 양성자 밀도 ρ_P 와 중성자 밀도 ρ_n 의 상대비 (ρ_P/ρ_n) 는 대략 얼마입니까?

1998학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리학 (석사과정)

1997. 11 .29.

역학. 전자기학. 열 및 통계역학 4면중 4

7. 평형 상태에서 약간 벗어난 고립된 물리계가 있습니다. 보기를 들자면 꽉 닫힌 용기에 담긴 기체의 온도가 위치마다 약간씩 다른 경우입니다. 그렇지만 고르지 않은 정도 즉 물매 (gradient) $\vec{\nabla}T$ 는 아주 작다고 하겠습니다.

(가) 이 경우 이 물리계는 시간이 지나면서 어떤 변화를 일으키는지 열역학의 법칙을 사용하여 설명하기 바랍니다.

(나) 온도의 물매가 있는 곳에 가상의 단면 s를 고려해 봅시다. 이 단면의 단위 넓이를 단위 시간 동안 통과하는 열에너지의 양을 Q_S 라고 합시다. 이 양은 $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}T$ 로 표현할 수 있는데 1차 근사적으로 어떤 관계식을 가지겠습니까 (여기서 $\hat{n}$ 은 열이 흐르는 방향의 단면 S 의 단위 수직 벡터임) ? 유도과정을 간략히 보이십시오.

(다) 기체의 평균자유거리 (mean free path)를 ℓ, 기체 알갱이의 갯수밀도를 ρ, 기체 알갱이의 평균 열운동 속도를 v, 그리고 비열 (specific heat)을 C라고 합시다. 가)에서 유도한 Q_S 와 $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}T$ 사이의 관계식을 ℓ, C 그리고 ρ 를 사용하여 표시하기 바랍니다. (힌트: 단 이 물리계는 3차원 공간의 등방성(isotropic)계라고 가정합시다).

1998학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리학 (석사과정)

양자역학 1 1997. 11. 29.

1. 양변의 길이가 L인 정사각형의 2차원의 밀폐상자가 있습니다 (상자 내부의 위치에너지는 0, 외부의 위치에너지는 무한히 크다고 하겠습니다).

가) 이 상자 안에서 운동하는 입자(질량 m) 한개의 에너지 준위를 가장 낮은 것으로부터 높은 순서대로 5개 구하고 각각에 대한 축퇴수(degeneracy)를 구하시오.

나) 이제 이 상자 안에 상호 작용이 없는 페르미 입자(질량 m) 6개가 운동하고 있습니다. 이 계의 기저상태와 첫 번째 여기상태의 에너지를 각각 구하시오.

다) 나)에서 고려한 페르미 입자계가 기저 상태에 있을 때 상자 중심점에서의 입자 밀도는 얼마입니까? 또 첫 번째 여기상태에 있을 때 이 점에서의 입자 밀도는 얼마입니까?

확인?

2. 전하가 없고 스핀이 1/2인 두 페르미 입자가 있습니다.

가) 두 페르미 입자의 계가 가질 수 있는 가능한 총 스핀은 얼마입니까? 이들 각 상태의 파동함수 (total spin wave function) 를 구하시오. (두 입자의 상호작용은 무시할 수 있습니다.)

나) 이제 두 입자가 일정한 거리 d 만큼 떨어진 위치에 고정되어 있고 다음과 같은 스핀-스핀 상호작용에 따라 운동하고 있습니다.

$$H = A\frac{(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2)\, d^2 - 3(\hat{S}_1 \cdot \vec{d})(\hat{S}_2 \cdot \vec{d})}{d^5}$$

(여기서 $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ 는 두 입자의 스핀을 나타냄). 이 때 가)에서 찾은 각각의 스핀 파동함수에 대하여 에너지 고유치를 구하십시오.

다) 이제 초기 시간 t = 0에서 첫번째 입자의 스핀 방향은 $\vec{a}$ 에 평행하고 두 번째 입자의 스핀은 반대 방향으로 있었습니다. 나)의 결과를 이용하여 두 입자의 스핀 모두 초기 방향과 반대로 뒤집히는데까지 걸리는 시간 (flip-flop time) 을 구하시오.

3. 2차원 양자홀효과 (quantum Hall effect)는 다음과 같은 간단한 양자계로 이해할 수 있습니다.

가) 2차원 등방조화 포텐셜 (isotropic harmonic potential) $V = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$에서 운동하는 질량 M 총에너지 E 인 입자의 정상상태는 쉬레딩거 방정식

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}\right] + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \Psi = E\Psi.$$

을 만족합니다. 이를 풀기 위하여 $\Psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$에서 $\Theta(\theta) = c\, e^{im\theta}$ (m=0, 1, 2,... ;정수) 라고 취하면, $R(r)$이 만족하는 방정식은

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{\hbar^2 m^2}{2Mr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2\right)R = ER$$

이 됨을 보이시오.

나) $r = \rho a$ $\left(a = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}}\right)$ 그리고 $E = \left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)\epsilon$ 로 표기하면 위의 방정식은 $\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\epsilon - \rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$로 표현됩니다. 이 방정식의 해는 $\rho \to 0$ 혹은 ∞에 근접한 경우 $R(z) = z^{|m|}\exp^{-z^2/2} G_n(z)$로 쓸 수 있습니다. 여기서 n=0, 1, 2,.. 이며 $G_n(\rho) = \sum_{p=0}^{n} b_p (\sqrt{\rho})^p$ 는 Laguerre 다항식을 나타냅니다. (참고: $G_n(\rho)$ 가 다항식이려면 $\epsilon = 2|m| + 2 + 4p_{\max}$, 즉 $E_{n,m} = \hbar\omega(|m| + 1 + 2n)$이어야 합니다.) 최저 란다우 준위인 n=0 의 경우 2차원 조화진동 함수는 복소변수 $z = \frac{1}{a}(x + iy)$를 이용하여

$$\Psi_{0,m}(r,\theta) = N z^m e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \equiv \Psi(z)$$

로 표현할 수 있음을, 또 각운동량은 $m\hbar$ 임을 보이시오.

다) 이제 두 전자(1,2)로 이루어진 계를 생각하겠습니다. m=홀수이고 $1 \leftrightarrow 2$ 교환에 대해 역대칭(antisymmetric)인 상태의 파동함수는 $\Psi(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^m e^{-\frac{1}{2}|z_1|^2} e^{-\frac{1}{2}|z_2|^2}$ 라고 쓸 수 있음을 설명하시오. 또한 이 상태의 총 각운동량 $L_z^{(\text{total})} \equiv L_z^{(1)} + L_z^{(2)}$ 은 $m\hbar$ 임을 보이시오.

라) 이제 N개의 전자가 있습니다. 임의의 두 전자를 서로 교환하여 ($i \leftrightarrow j$) 항상 역대칭이 되는 총파동함수는

$\Psi(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \prod_{j>k}^{N} (z_j - z_k)^m e^{-\frac{1}{2}\Sigma_i |z_i|^2}$가 됨을 보이시오(이를 Laughlin's wave function 이라고 합니다). 또 이 파동함수는 $L = \sum_{k=1}^{N} L_z^{(k)}$의 고유 상태임을 보이시오.