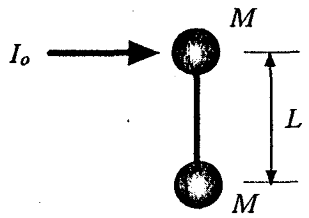
2000 학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리 (석사과정)

문제지 1 (역학, 전자기, 열 및 통계) 1999. 11. 27.

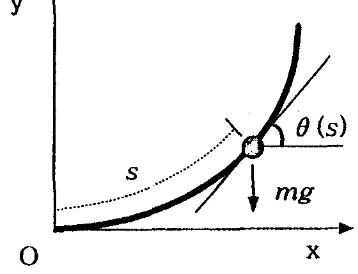
1. (20점)
무중력 공간에 그림과 같이 질량 M인 추 2개로 이루어진 아령 모양의 물체가 떠 있다. 갑자기 물체의 한쪽 끝에 순간적인 충격량 (impulse) I_o가 가해져 물체가 회전하면서 움직이기 시작하였다. 가운데 연결 막대의 질량은 무시하자.

가) 질량중심(center of mass)의 선속도 v_{cm}를 구하라.
나) 물체가 한 바퀴 회전하였을 때 물체의 질량중심이 이동한 거리를 구하라.
다) 충격을 받은 후 물체의 운동에너지를 구하라.



2. (20점)
그림과 같이 부드럽게 굽은 철사에 질량 m인 구슬이 꿰어져 쓸림(마찰)없이 미끄러진다. 중력가속도를 g, x-y 좌표의 원점 O로부터 구슬까지 철사를 따라 잰 거리를 s, x-축과 철사의 접선이 이루는 각을 $\theta(s)$라 하고, 다음 물음에 답하라. 원점에서 $\theta=0$이다.

가) s를 일반화좌표로 사용해서 구슬의 운동에 대한 Lagrangian을 구하라.
나) 이 Lagrangian으로부터 구슬의 운동방정식을 구하라.
다) $\theta = \sin^{-1}(s/C)$ (C는 상수) 라고 하고, 구슬이 어떤 지점 $s(t=0)=s_o$ 에서부터 미끄러지기 시작하여 원점 O에 도달하는데 걸리는 시간을 구하라. 또 $s(t=0)=\frac{1}{2}s_o$에서 출발하였을 때 걸리는 시간은 얼마인가?
라) 다)에서의 궤적 $(x(\theta), y(\theta))$를 구하라.

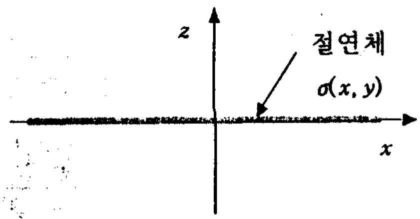


3. (20점)
$z=0$인 평면에 놓인 얇은 두께의 절연체에 전하가 분포하여 면전하밀도가 $\sigma(x,y)=\sigma_o\cos kx$로 주어졌다. (아래 그림 참조)

가) 이 절연체를 제외한 모든 공간은 진공이고 자유전하는 없다고 하자. 이 공간에서 전기 퍼텐셜을

$$\phi(r)=f(z)\cos kx$$

으로 쓸 수 있다고 할 때, $f(z)$가 만족하는 방정식을 구하라.
나) $z=0$에서 $f(z)$가 만족해야 하는 경계조건을 유도하고, 그로부터 퍼텐셜 $\phi(r)$를 결정하라.
다) 나)에서 구한 퍼텐셜을 이용하여, $z>0$ 영역에서의 전기장 $E(r)$를 구하고, 이 영역에서의 전기력선(electric field lines)을 zx-면에 개략적으로 그려라.
라) 만일 $z<0$ 공간이 모두 전도체 금속으로 채워진다면, $z>0$ 영역의 퍼텐셜은 어떻게 달라지는가? 금속표면에 유도되는 면전하밀도를 구하라. (단, $z=0$의 절연체와 $z<0$의 금속 사이에 전하의 이동은 없다고 가정한다.)



2000 학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리 (석사과정)

문제지 2 (역학, 전자기, 열및 통계) 1999. 11. 27.

4. (20점)

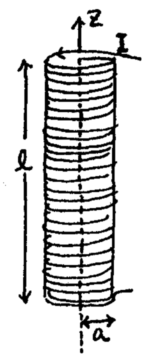
아래 왼쪽 그림과 같이 길이 l, 반지름 a의 원통모양으로 전선이 N번 감겨진 solenoid를 생각하자. (투과상수(permeability)는 μ_o로 놓을 것)

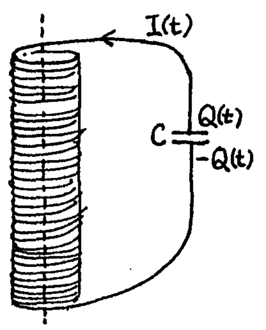
가) $l \gg a$ 이라면, 이것은 무한히 긴 이상적인 solenoid로 생각할 수 있다. 원통의 대칭성과 Ampere의 법칙을 이용하여, solenoid 내부와 외부의 자기장의 크기는 각각 일정하고 그 방향이 원통의 축 방향과 평행함을 보여라. 특히 solenoid 외부의 자기장이 0이 됨을 보여라.

나) solenoid의 전선에 흐르는 전류의 크기를 I라고 할 때, solenoid 내부 자기장의 크기와 inductance L을 μ_o, N, l, 그리고 a로 표시하라.

다) 아래 오른쪽 그림과 같이 이 solenoid가 축전용량(capacitance) C인 축전기와 연결되어 있을 때, 축전기에 대전된 전하 Q와 solenoid의 전선에 흐르는 전류의 I가 만족하는 운동방정식을 구하라.

라) 다)에서 $t=0$인 순간의 축전기 전하와 solenoid의 전류가 각각 $Q(t=0)=Q_o$, $I(t=0)=0$이라면, 시간 $t\,(>0)$에서 solenoid에 흐르는 전류 $I(t)$를 구하라.





5. (14점)

가) 어떤 연역학계의 접근 가능한 상태수를 W라 할 때, 이 계의 엔트로피는 어떻게 주어지는가?

나) 서로 열 접촉을 하고 있는 두 계 A와 B가 외부와 단절되어 있다. 이때 열의 이동에 대해 계 A와 B가 평형을 이룰 조건을 엔트로피의 변화와 관련지어 설명하라.

다) E와 $E+\delta E$ 사이의 에너지를 갖는 이상기체의 접근 가능한 상태수는

$$W = C\,V^N E^{\frac{3N}{2}}\,\delta E$$

로 주어진다. 여기서 C는 상수이고, V와 N은 각각 부피와 분자수를 나타낸다. 이로부터 상태방정식을 구하라.

6. (14점)

해밀토니안이

$$H = \frac{1}{2}kX^2 + \frac{P^2}{2m}$$

로 주어지는 계의 양자역학적 고유에너지는

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

이다. 여기서 P는 X의 conjugate momentum이며, k와 m은 상수이고 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$이다. 이 계가 온도 T에서 열평형 상태에 있다고 하자.

가) 평균 에너지 $\bar{U}$를 구하라.

나) 에너지 분산(variance)은

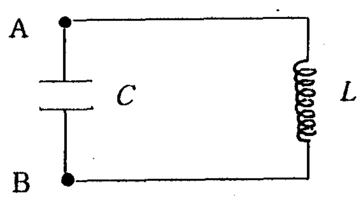
$$\langle (H-\bar{U})^2\rangle = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial \beta} \qquad (\text{여기서 } \beta \equiv \frac{1}{k_B T})$$

를 만족함을 증명하라.

다) 만약 $k=\frac{1}{C}$, $m=L$, $X=Q$(전하)로 놓으면 이 해밀토니안은 그림과 같은 LC 회로를 기술하게 된다. 이 때

$$\left\langle \frac{1}{2}kX^2 \right\rangle = \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \frac{\bar{U}}{2}$$

라는 사실을 이용하여, AB 양단 간의 전위차에 대한 분산 $\langle V^2\rangle$을 구하라.



2000 학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전공: 물리 (석사과정)

(양자물리) 1999. 11. 27.

7. (20점)

반경과 높이가 각각 a와 b (단, $2a \geq b$)인 원통의 옆면 (그림의 회색칠 된 부분)에서 움직이는 질량 m인 입자가 있다. 이 입자는 원통좌표계 (ρ, θ, z)로 표현하여

$$\rho = a, \quad 0 \leq z \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

인 제한을 갖는 것 이외에는 자유운동을 한다.

가) 이 입자의 운동을 기술하는 (시간에 무관한) 슈뢰딩거 방정식을 쓰고, 변수분리법을 이용하여 에너지 고유상태가 만족하는 미분방정식을 구하라. 단 원통좌표계에서는

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

와 같이 주어진다.

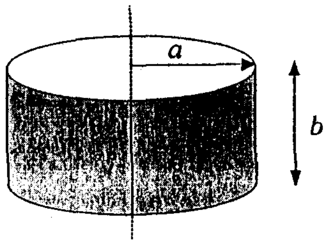
나) 이 입자의 바닥상태 에너지와 그 고유함수를 구하라. 이 때 이 입자를 발견할 확률이 가장 큰 곳의 z좌표는 어디인가?

다) 이 입자의 첫 번째 들뜬 상태의 에너지와 고유함수를 구하라.

라) 만일 여기에

$$V(\theta) = V_o \sin\theta \qquad (\text{단, } V_o \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2})$$

인 작은 퍼텐셜이 주어진다고 할 때, 바닥상태와 첫 번째 들뜬 상태의 에너지 변화를 1차 섭동이론을 이용하여 구하라.



8. (20점)

K (potassium) 원자의 최외각 전자에 작용하는 spin-orbit interaction 에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H' = \frac{e}{2m^2c^2}\left[\frac{1}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr}\right] L \cdot S \equiv f(r)\, L \cdot S$$

여기서 L, S는 각각 궤도각운동량, 스핀각운동량 연산자이고, $\Phi(r)$은 구대칭인 정전기 퍼텐셜이다.

가) spin-orbit 에너지가 위의 형태로 주어지는 물리적 이유를 간단히 설명하라.

나) 총 각운동량을 J라고 할 때,

$$H' = \frac{f(r)}{2}\left[J^2 - L^2 - S^2\right]$$

으로 쓸 수 있음을 보여라.

다) $J = L + S$ 일 때, (J^2, J_z)의 한 고유함수인 $|j = \frac{1}{2}, m_j = \frac{1}{2}\rangle$의 상태벡터를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$|j = \tfrac{1}{2}, m_j = \tfrac{1}{2}\rangle = \sum_{m=-1}^{+1} \sum_{m_s=-1/2}^{+1/2} C(m, m_s)\, |l = 1, m\rangle\, |s = \tfrac{1}{2}, m_s\rangle$$

아래 관계식을 참조하여, $C(m, m_s)$를 구하라.

(참조) $J^2 |jm_j\rangle = j(j+1)|jm_j\rangle$

$J_z |jm_j\rangle = m_j |jm_j\rangle$

$J_\pm |jm_j\rangle = \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j \pm 1)}\, |j, m_j \pm 1\rangle$

$J_\pm = J_x \pm iJ_y$

(여기서 $\hbar = 1$로 가정)

라) K 원자의 4p 준위는 H'에 의하여 몇 개의 에너지 준위로 갈라지는가? 이 때 각 준위 사이의 에너지 간격은 어떻게 주어지는가? 단, 4p 준위 상태함수의 radial function은 $R_{4p}(r)$로 표시하고, 이 함수는 H'에 의하여 변하지 않는다고 가정하라.