2001학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전 공 : 물리학 (석사과정)

2000. 11. 25.

주의:

◎ 해답은 각각의 문제마다 별도의 답안지에 한 장씩 작성할 것.

◎ 답안지 왼쪽 상단에 문제번호를 필히 기입하고, 작성하지 않은 문제의 답안지도 제출할 것. (총 6매의 답안지가 제출되어야 함.)

1.

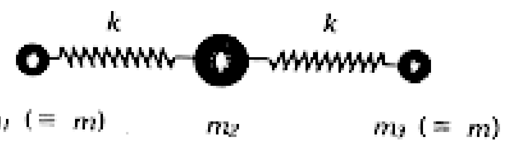
CO_2 와 같은 선형 분자는 그림과 같이 질량이 m_1, m_2, m_3 (단, $m_1 = m_3 = m$) 인 세 개의 물체가 용수철 상수 k 인 두 개의 동일한 용수철에 의해 연결되어 있는 모형으로 표현할 수 있다. 이 문제에서는 $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 1$ 라 가정하고, 수평축 방향의 1차원 운동만 생각하기로 하자.

(가) 각 물체의 위치를 기술하기에 적합한 일반좌표계를 사용하여 개개의 물체에 대한 운동방정식을 구하라.

(나) 위 운동방정식으로부터 이 계의 질량중심은 일정한 속도로 움직임을 보이라. 이제 질량중심의 속도와 위치를 모두 0으로 상정하고, 앞의 일반좌표들 사이에 성립하는 관계식을 구하라.

(다) 고유진동수 (normal mode frequency)를 구하고, 각 고유진동형태에 해당하는 고유운동을 정성적으로 기술하라.

(라) 고유좌표와 이에 대응하는 고유선운동량을 정의하고, 이 계의 Hamiltonian을 고유좌표 및 고유선운동량의 함수로 표시하라. 또 결과 식을 보고 이의 물리적 의미를 논하라.



2.

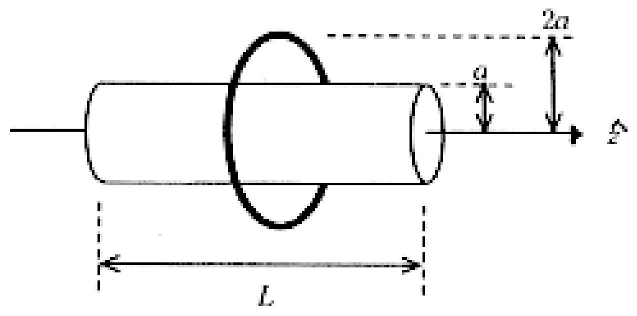
유전율이 ε 이고 반경 a, 길이 L ($L >> a$)인 부도체 실린더의 바깥 면에 표면전하밀도 σ의 전하가 균일하게 분포되어 있다. 모서리 효과를 무시하고 다음에 답하라.

(가) 실린더의 내·외부에서 전기장을 구하라.

(나) 실린더가 z-축을 중심으로 각속도 $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$로 회전할 때 실린더 내부의 자기장을 구하라.

(다) 반경이 $2a$ 이고 저항이 R 인 도체 고리가 그림과 같이 실린더 중심 근처를 둘러싸고 있다. 실린더의 회전속도가 $\omega(t) = \omega_0(1 - t/t_0)$로 줄어들 때, $0 < t < t_0$ 동안 이 도선에 유도되는 전류의 크기와 방향을 구하라.

(라) 반경 $2a$ 인 도선을 선전하 밀도 λ 를 띄고 있는 부도체 고리로 바꾸면 이 고리는 회전을 하게 된다. 실린더의 회전속도가 문제 (다)와 같이 줄어들어 실린더가 완전히 정지한 순간, 고리의 각운동량을 구하라.



3.

어떤 양자계를 이루고 있는 입자의 에너지 준위가 $E_n = \varepsilon_0 n$, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ (ε_0는 양수)로 주어진다. 이 계는 상호작용이 없는 N 개의 입자로 이루어져 있다.

(가) 이 계의 분배함수(partition function)를 구하여라.

(나) 평균에너지 $\langle E \rangle$를 구하여, 이로부터 온도가 아주 높을 때와 아주 낮을 때의 근사 표현을 보이고, 이러한 표현이 나타나는 이유를 물리적으로 논의하여라.

(다) 이 계의 엔트로피 S를 구하고, 열역학 제 3법칙을 만족하는 지를 보이라.

(라) 20세기 초반에는 부도체의 비열이 절대온도 0K로 되면 0으로 줄어드는 실험 결과를 설명할 수 없었다. 위에서 제시된 양자계의 비열을 구하여, 이 모형이 부도체 비열의 온도에 따른 변화를 설명할 수 있는 지를 보이라.

2001학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전 공 : 물리학

(석사과정)

2000. 11. 25.

4.

그림과 같이 질량 m, 원래의 길이 l_0, 용수철 상수 k 인 용수철의 왼쪽 끝이 단단한 지지대에 고정되어있고 다른 쪽 끝은 질량을 무시할 수 있는 줄에 연결되어 있는데, 이 줄은 마찰 없는 도르래를 돌아 중력 g의 영향을 받고 있는 질량 M 인 물체와 연결되어있다.

(가) 이 계가 평형을 이루었을 때 용수철의 길이 l 을 구하라.

(나) 지지점 A로부터 거리 x에 있는 용수철 상의 미세 부분이 평형 위치로부터 수평 방향으로 움직인 작은 변위 $\xi(x,t)$ 는 아래의 파동방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{m}{kl^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

수평 방향에 대한 파동의 전달속도는 얼마인가?

(다) 지지점 A에서의 경계조건은 $\xi(0,t) = 0$ 로 쓸 수 있다. 이제 $x = l$ 의 위치에 있고 길이가 Δx 인 미소한 용수철 조각에 대한 운동방정식을 고려하여, 물체 M 이 매어 달린 쪽의 점 B에 대한 경계조건은 아래 식으로 주어짐을 보이라.

$$\left[M\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} + kl\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \right]_{x=l} = 0$$

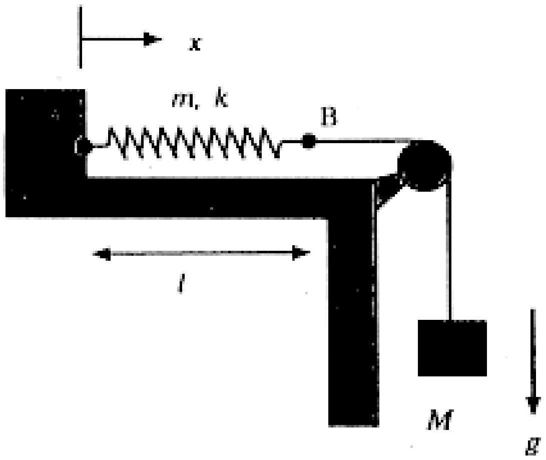
(라) 이제 주어진 파동방정식의 해 가운데 다음 식과 같은 형태의 정상파만 고려할 때, ω 가 만족하는 식과 $f(x)$ 를 구하라.

$$\xi(x,t) = f(x)\cos\omega t$$

(마) $m/M \ll 1$ 조건 아래에서 이 계에 존재하는 정상파동의 각주파수 ω 가운데 가장 낮은 것 두 개를 구하라.

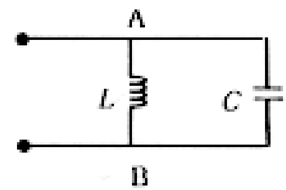
[참조]

$x \ll 1$ 일 때, $\tan^{-1}x \approx x + n\pi,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$



5.

그림과 같은 회로가 있다. 코일의 인덕턴스는 L, 축전기의 용량은 C 라고 하자.



(가) 그림과 같은 LC 회로에서 전류 $i(t)$ 에 대한 미분 방정식을 구하라.

(나) 인덕터 L를 통해 직류전류 i_0 가 흐르다가 $t=0$ 의 순간 끊어졌다. 이후의 전류 변화에 대한 미분방정식의 해를 구하라. 코일과 축전기에 저장된 에너지의 시간변화와 그 물리적인 의미를 설명하라.

(다) 전류가 갑자기 끊어진 $t=0$ 순간, A, B 양단에 걸리는 순간 전압이 축전기 C가 있을 때와 없을 때 어떻게 다른가? 이러한 측면에서 축전기 C의 역할을 설명하여 보라.

(라) 이제는 A, B 양단을 통하여 교류 전류 $i = i_0\sin(\omega t)$가 흐르도록 한다. ω가 매우 작을 때(0은 아님)와 매우 클 때(∞는 아님) 각각 근사적으로 A, B 양단에 걸리는 제곱평균제곱근(root mean square) 전압 V_{rms}을 구하라. 또 V_{rms}를 전체 ω 영역에 대해서 정성적으로 그려보아라.

(마) 코일의 내부저항 R을 무시할 수 없을 때 ω 에 대한 V_{rms}의 그래프는 (라)와 비교하여 어떻게 변하는지 보이고, 이를 물리적으로 해석하라.

6.

매우 높은 온도와 아주 낮은 밀도 상태의 기체는 고전적으로 취급할 수 있다. 이러한 상태의 기체 원자 N 개가 2차원 평면에 구속되어 있다. 기체 원자는 퍼텐셜 $V(r)=r^2=(x^2+y^2)$을 받고 있다. 여기서 r은 좌표 원점으로부터의 거리이다.

(가) 좌표 원점으로부터의 거리 r에 분포되는 원자의 수 n(r)을 구하여라.

(나) 운동량의 크기 p를 가지는 원자의 수 n(p)를 구하여라.

(다) 이 기체의 평균 운동에너지 <K>와 평균 위치에너지 <V>를 구하고, 그 결과를 등분배 정리로 설명하여라.

(라) 높은 온도에서 구한 총 에너지 <E>=<K>+<V>는 절대온도 0K에 가까워짐에 따라 양자역학적 보정 효과에 의해 변화된다. 온도에 따른 변화 모습을 그래프를 사용하여 정성적으로 보여라.

[참조] $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$

2001학년도 서울대학교 대학원 입학시험문제

전 공 : 물리학

(석사과정)

2000. 11. 25.

주의:

◎ 해답은 각각의 문제마다 별도의 답안지에 한 장씩 작성할 것.

◎ 답안지 왼쪽 상단에 문제번호를 필히 기입하고, 작성하지 않은 문제의 답안지도 제출할 것. (총 2 매의 답안지가 제출되어야 함.)

7.

포텐셜에너지가 $V(x)$로 주어지는 입자의 정상상태 파동함수 $\psi(x)$ 는 다음과 같은 1차원 슈레딩거 방정식을 만족한다.

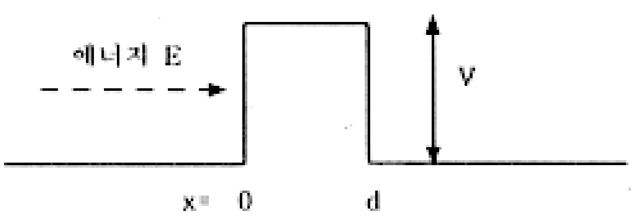
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x) = E\,\psi(x).$$

(가) 준고전 영역 $\hbar\to 0$ 에서, 파동함수는 $\psi(x)=\exp\left(i\frac{S_0(x)}{\hbar}+S_1(x)\right)$ 꼴로 $\hbar$-섭동전개할 수 있다. 슈레딩거 방정식에 대입하여, $S_0(x)$ 및 $S_1(x)$ 들이 만족하는 2개의 미분 방정식들을 $\hbar$-섭동전개를 이용하여 구하여라.

(나) (가)의 결과에서 $\hbar$-섭동전개의 가장 낮은 차수(lowest order)만을 취하여, $\frac{dS_0(x)}{dx}$ 을 $V(x)$ 와 E 의 함수로 표시하여라.

(다) (나)의 결과를 이용하여 $\hbar$-섭동전개의 가장 낮은 차수에서 파동함수 $\psi(x)$ 를 적분식 형태로 표시하여라.

(라) 그림과 같이 포텐셜 장벽이 주어져 있고 ($0<E<V$), 왼쪽에서 입자가 입사하였다. 이제 $x=0$ 에서 이 입자의 진폭 (amplitude) 이 1 이라고 하자. 장벽내부 ($0<x<d$)에서 지수꼴로 (exponentially) 증가하는 파동함수 항의 계수가 충분히 작아 0으로 놓을 수 있다고 할 때, 이 입자가 $x>d$ 로 터널링할 확률은 얼마인가?



(마) 위 문제 (라)에서 만일 포텐셜 장벽 크기가 $d/2<x<d$ 인 영역에서 10 % 증가하였다고 하자. 터널링 확률의 크기는 (라)의 경우와 비교하여 얼마나 바뀌는지 근사계산 (approximate estimate) 하여라.

8.

전자의 스핀 벡터는, 파울리 행렬

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & +1\\ +1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ +i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}+1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

을 사용하면, $\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ 로 주어진다. 이제, $|+\rangle$, $|-\rangle$ 를 각각 $\hat{z}$-방향의 스핀 고유상태, 즉 $S_z|+\rangle=+(\hbar/2)|+\rangle$ 와 $S_z|-\rangle=-(\hbar/2)|-\rangle$ 를 만족하는 상태라 하자. 또 임의의 3차원 단위 벡터를

$\hat{n}(\theta,\phi)=(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ 라고 표기하자.

(가) $\hat{n}(\theta,\phi)$-방향 성분의 스핀값 $\vec{S}\cdot\hat{n}$ 이 $+\hbar/2$ 인 전자의 규격화 고유상태(normalized eigenstate), 즉 $\vec{S}\cdot\hat{n}\,|+\hat{n}\rangle=+(\hbar/2)\,|+\hat{n}\rangle$ 를 만족하는 상태가

$$|+\hat{n}\rangle=\cos\frac{\theta}{2}\ e^{-i\phi/2}\ |+\rangle+\sin\frac{\theta}{2}\ e^{+i\phi/2}\ |-\rangle$$

로 주어짐을 보여라. (주의: 고유상태의 전체적인 위상은 자유롭게 변화시킬 수 있다.)

(나) 임의의 스핀상태를 $|\psi\rangle$라고 하고, 행렬 R 을 $R_{ab}=\langle a|\psi\rangle\langle\psi|b\rangle$ 라 정의하자. 여기서 $|a\rangle$와 $|b\rangle$ 는 $|+\rangle$ 또는 $|-\rangle$ 상태를 표시한다.

(A) $|\psi\rangle=|+\hat{n}\rangle$로 주어졌을 때, 행렬 R_{ab}의 모든 성분들을 구하여라.

(B) 행렬 R은 항상 $R=(1/2)(I+\vec{P}\cdot\vec{\sigma})$ 꼴로 표시할 수 있다. 문제 (A)에서 구한 R 에 대한 벡터 $\vec{P}$ 를 구하여라.

(다) $\hat{z}$-방향으로 균일한 자기장 B 안에서 운동하는 전자의 해밀토니안 연산자는

$H=(1/2)\hbar\omega\sigma_3$ (ω는 B에 비례하는 상수)

꼴로 표시할 수 있다. 초기 시간 $t=0$ 에서 $|+\hat{n}(\theta,\phi)\rangle$ 상태에 있던 전자의 스핀벡터가 시간 $t=T$ (여기서 $T>0$) 동안 슈레딩거 방정식에 따라 운동하였다. 이 때 시간 T 후의 $\vec{P}(t=T)$ 를 구하여라.

(라) 이제 조건을 바꾸어, 전자가 $\hat{y}$-방향으로 균일한 자기장 안에서 운동한다고 하자. 이 경우, 전자의 해밀토니안 연산자는

$H=(1/2)\hbar\Omega\sigma_2$ (Ω는 B에 비례하는 상수)

으로 표시된다. 초기 시간 $t=0$ 에서 $|+\hat{n}(\theta,\phi=0)\rangle$ 상태에 있던 전자의 스핀벡터가 시간 $t=T$ 동안 슈레딩거 방정식에 따라 운동하였다. 이 때 $\vec{P}(t=T)$ 를 구하여라.